

Précisions sur les conjectures au secondaire

**Comment vaincre l'inertie des élèves
devant une conjecture?**

Direction de la formation générale des jeunes
Secteur de l'éducation préscolaire et de l'enseignement primaire et secondaire
Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur



Animatrices

Sophie Genest

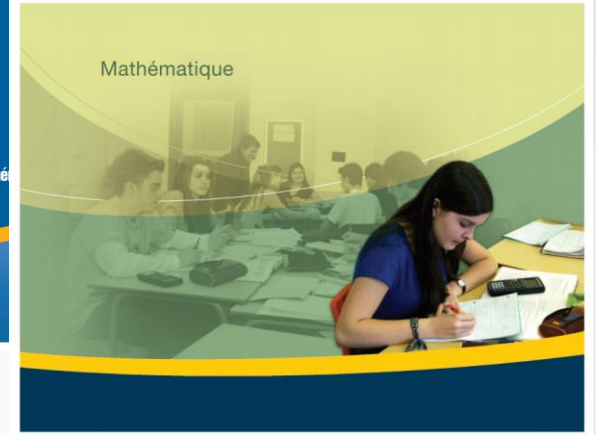
- Enseignante de mathématique au secondaire
- Collaboratrice aux programmes de mathématique
- Intérêt marqué pour la compréhension chez les élèves

Geneviève Dupré

- Conseillère pédagogique en prêt de service /domaine de la mathématique
- Intérêt marqué pour la résolution de problèmes

Plan de la présentation

- Conjecture et Programme de formation
- Pistes d'enseignement liées à la conjecture
- Tâches de conjecture
- Création de situations de conjecture



Conjecture et Programme de formation

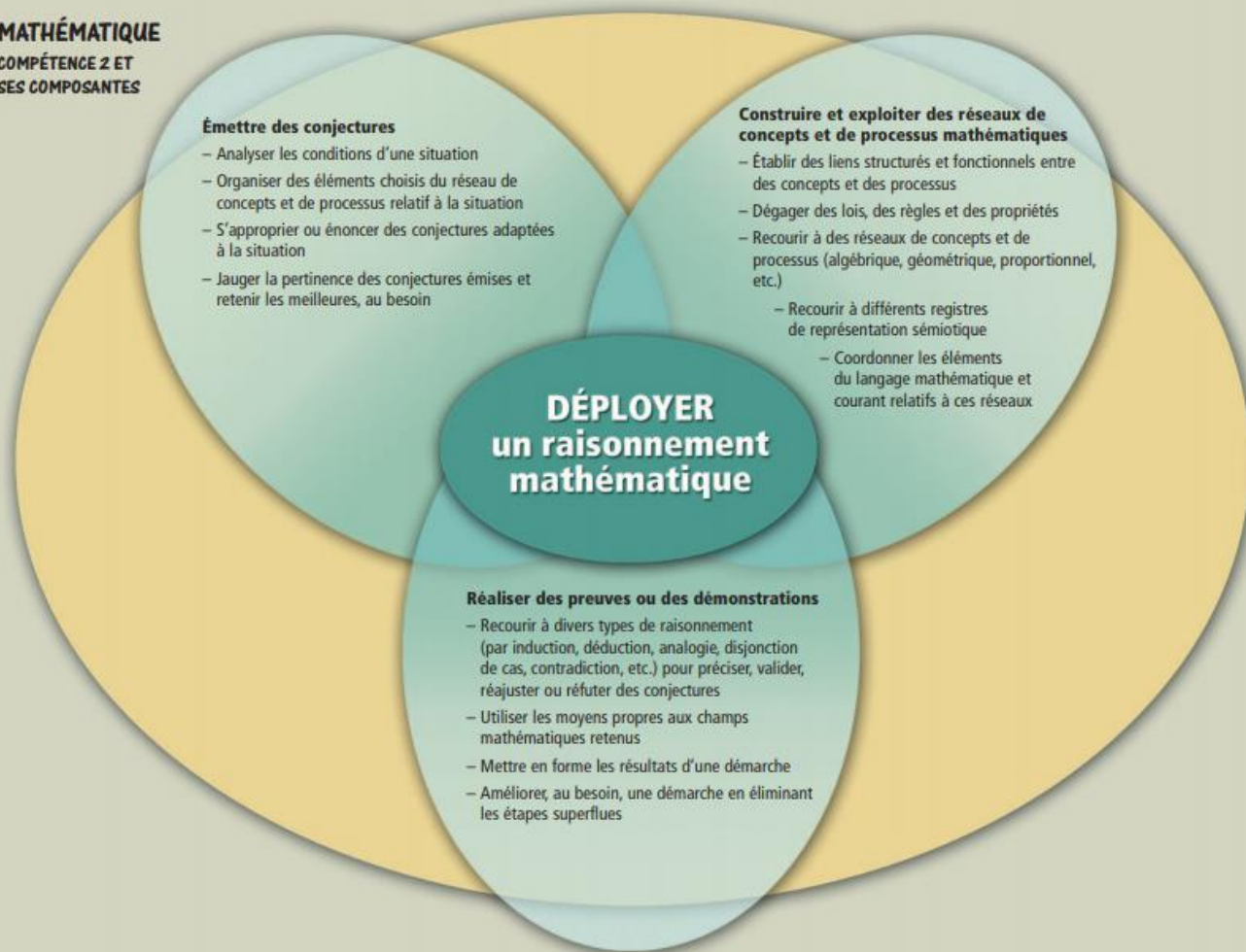
www.education.gouv.qc.ca/enseignants/pfeq/seconaire/domaine-de-la-mathematique-de-la-science-et-de-la-technologie/mathematique/

Définition

La conjecture est un énoncé que l'on pense être vrai, mais qui n'a pas encore été prouvé.

Composantes de la compétence 2

MATHÉMATIQUE COMPÉTENCE 2 ET SES COMPOSANTES



PEFQ, Premier cycle, p. 245.
PFEQ, Deuxième cycle, p. 31.

Composantes de la compétence 2

MATHÉMATIQUE

COMPÉTENCE 2 ET SES COMPOSANTES

Émettre des conjectures

- Analyser les conditions d'une situation
- Organiser des éléments choisis du réseau de concepts et de processus relatif à la situation
- S'approprier ou énoncer des conjectures adaptées à la situation
- Juger la pertinence des conjectures émises et retenir les meilleures, au besoin



**Pistes d'enseignement
liées à la conjecture**

Pistes d'enseignement



- Concrétiser l'idée de conjecture

Pistes d'enseignement

- Favoriser l'apprentissage par l'exploration
- Favoriser la « culture de l'argumentation »
- Compléter des conjectures formulées partiellement

Favoriser l'apprentissage par l'exploration

Travailler à partir de :

- Situations de manipulations
- Problèmes ouverts
- Réseaux de concepts

Pistes d'enseignement

Analyse

Je vérifie les conjectures et je les précise.

Réflexion approfondie

J'améliore ma démarche et mon raisonnement de façon autonome.

Évaluation des stratégies

J'évalue la pertinence lors d'une séance plénière.

Partage des stratégies

J'explique mes processus à un sous-groupe.

Réflexion préliminaire

Je pense et j'écris de façon autonome.



Pistes d'enseignement

Réflexion préliminaire

Plan d'action et essais



Vérification de la compréhension de l'énoncé

Vocabulaire et réseau de concepts



Rétroaction

Pistes d'amélioration



Comparaison

Ressemblances et différences entre les conjectures



Construction d'une preuve

Généralisation, raisonnement déductif ou inductif, preuve par analogie



Favoriser la « culture de l'argumentation »

- Justifier ses réponses
- S'approprier le vocabulaire propre à la mathématique
- Trouver l'intrus et expliquer les raisons de son choix

Quel est l'intrus?

7	$7x^2$
$-7xy$	$7xy + 7$

$$f(x) = 3x^2$$

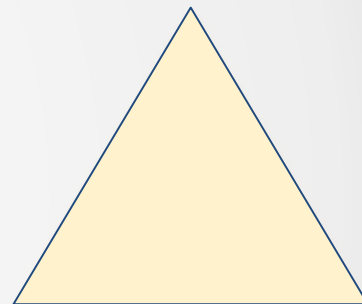
$$g(x) = \sqrt{3x}$$

$$h(x) = [3x]$$

$$i(x) = 3^x$$

Compléter une conjecture

→ On calcule le périmètre d'un triangle équilatéral à partir de la mesure d'un côté donnée sous la forme d'une expression algébrique.



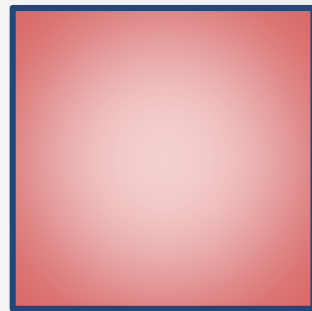
Complétez l'énoncé suivant : Si la mesure d'un côté est représentée par une expression algébrique ne contenant aucun terme semblable, l'expression algébrique représentant le périmètre du triangle équilatéral contiendra _____.

Compléter une conjecture

→ On calcule l'aire d'un carré à partir de la mesure d'un côté donnée sous la forme d'une expression algébrique.

Complétez l'énoncé suivant : Si la mesure d'un côté est représentée par une expression algébrique ne contenant aucun terme semblable, l'expression algébrique représentant l'aire du carré contiendra

_____.



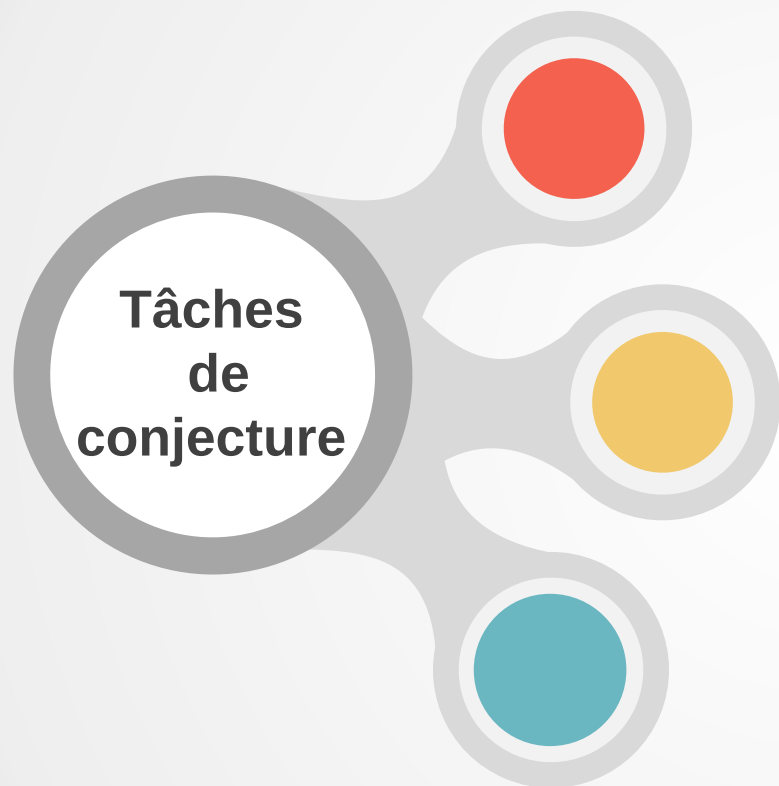
Compléter une conjecture

→ On se questionne sur les propriétés d'un graphe.

Complétez l'énoncé suivant : La somme des degrés des sommets d'un graphe est _____ .



Tâches de conjecture



Réfutation

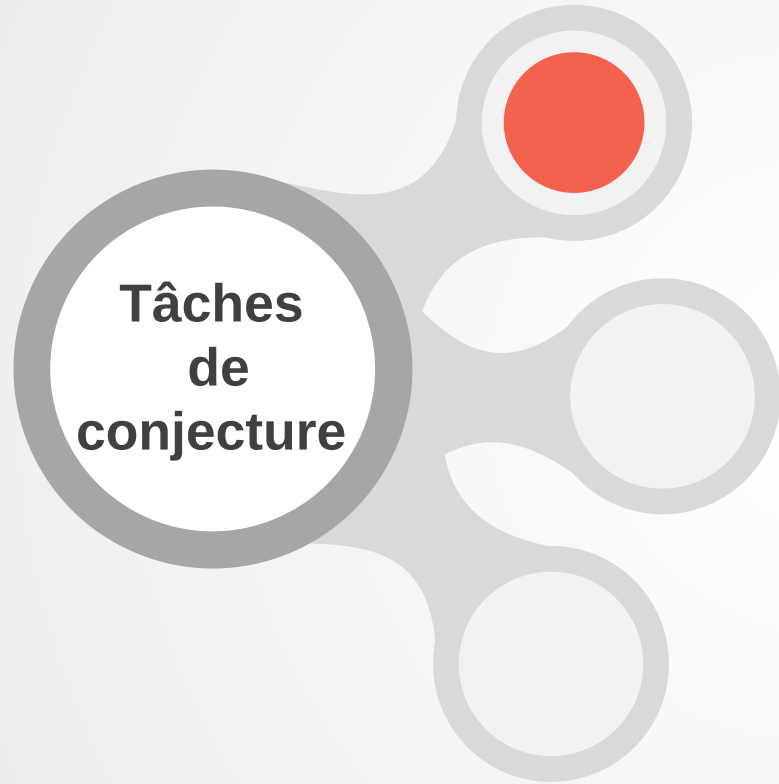
Contre-exemple,
Raisonnement par contradiction

Validation

Raisonnement déductif, analogie,
raisonnement inductif, preuve,
généralisation, argumentation

Formulation (émission)

Dégager un lien, donner des
exemples variés, comparer,
justifier



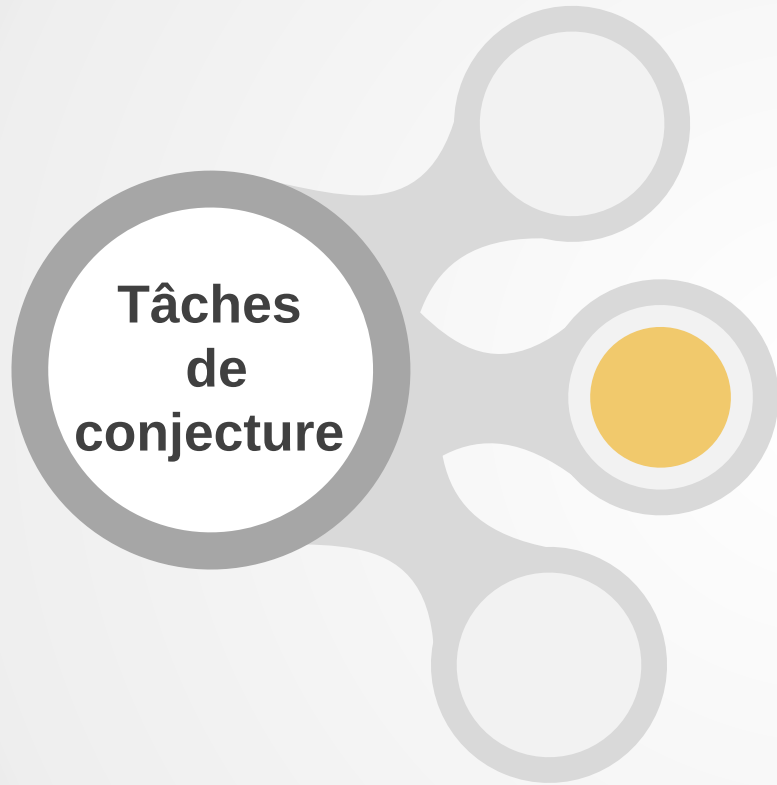
Réfutation

Contre-exemple,
Raisonnement par contradiction

Tâche de conjecture : réfutation

- Mireille assure que pour toutes fonctions parties entières, il n'existe qu'une seule règle associée au graphique de la fonction. A-t-elle raison?
- Confirmez ou infirmez l'énoncé suivant : lorsqu'on ajoute deux nombres opposés dans une distribution statistique, la moyenne ne change pas.

Source : MEES, Précisions sur les types de raisonnement à exploiter en mathématique au secondaire; Exemples de démarche illustrant les différents types de raisonnement.

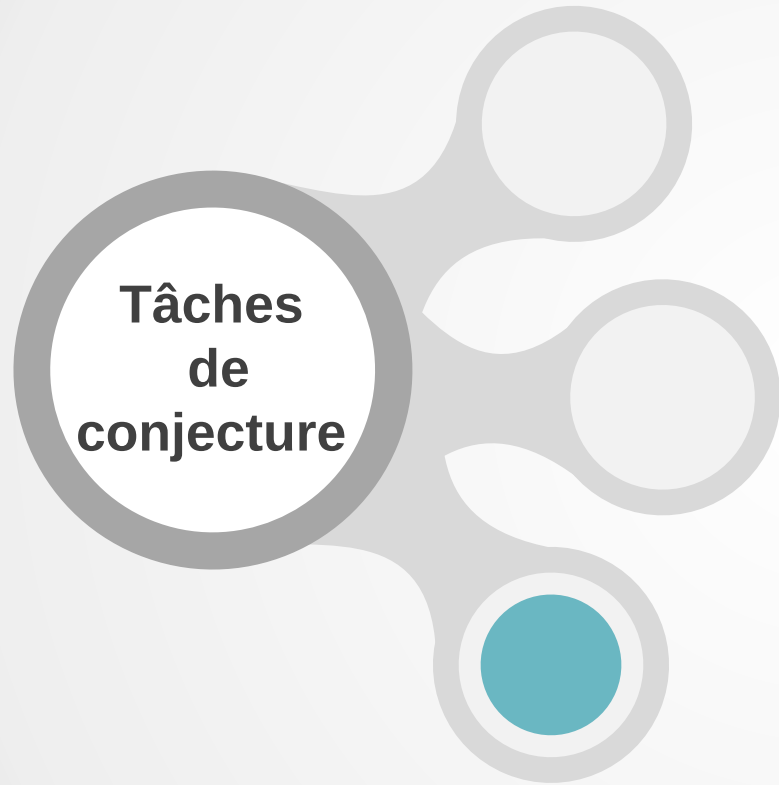


Validation

Raisonnement déductif, analogie,
raisonnement inductif, preuve,
généralisation, argumentation

Tâche de conjecture : validation

- L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse? La somme de deux nombres négatifs est toujours négative. Expliquez pourquoi.
- Emma affirme que la mesure d'un angle intérieur d'un polygone régulier est toujours paire. L'affirmation d'Emma est-elle vraie ou fausse? Expliquez pourquoi.



Formulation (émission)

Dégager un lien, donner des exemples variés, comparer, justifier

● Tâche de conjecture : formulation (émission)

- À partir d'une droite existante, tracez plusieurs droites perpendiculaires à celle-ci. Formulez une conjecture décrivant le lien qui existe entre les pentes des droites tracées.
- Où se trouve la solution optimale dans un polygone de contraintes?

Dialogue intérieur

- Quels sont les concepts ou les éléments à mettre en relation?
- Comment les trouver ou les calculer?
- Quels exemples choisir pour m'aider à visualiser le lien existant?
- Comment m'assurer que j'ai tenu compte de tous les cas possibles?
- Comment vérifier que mon argumentation est suffisamment développée?
- Comment savoir si ma conjecture peut être démontrée?

● Tâche de conjecture : formulation (émission)

→ Exemple de 3^e secondaire, pages 5-6.

→ Exemple de 5^e secondaire, pages 9-13.

Source : MEES, Précisions sur les types de raisonnement à exploiter en mathématique au secondaire; Exemples de démarche illustrant les différents types de raisonnement.

Pistes d'enseignement



- Rendre ludique la conjecture

www.semainedesmaths.ulaval.ca

Tâche de conjecture : formulation (émission)

Exemple tiré d'une épreuve ministérielle

→ Examen de fin d'études secondaire, séquence TS, juin 2015, question 16.



Création de situations de conjecture



Création de situations de conjecture

- Poser des questions avant d'enseigner un nouveau concept
- Modifier les questions typiques d'application
 - Pour amener les élèves à compléter, réfuter, valider ou émettre des conjectures
- Travailler à partir des énoncés du programme

● Exemple de modification

- La mesure d'un côté d'un pentagone régulier est de 10 cm et la mesure de son apothème est de 8 cm. Calculez l'aire de ce pentagone. (Question typique)
- Complétez l'énoncé suivant : La différence entre l'aire d'un heptagone régulier et l'aire d'un pentagone régulier, qui ont les mêmes mesures de côtés et d'apothèmes, correspond à _____.

● Exemple de modification (suite)

- Qu'arrive-t-il à l'aire d'un pentagone si on double la mesure de son apothème?
- L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse?
L'aire d'un polygone régulier double lorsque la mesure de son apothème double.
- Robert affirme que si la mesure de l'apothème et la mesure d'un côté d'un hexagone doublent, alors l'aire de cet hexagone double aussi. A-t-il raison?

● Exemple de modification

- Énoncé du programme : Les milieux des côtés de tout quadrilatère sont les sommets d'un parallélogramme.
- Énoncé transformé en question de conjecture : Quel lien peut-on établir entre les milieux des côtés d'un quadrilatère et la figure formée en les reliant?

Déployer un raisonnement mathématique

- Voir l'activité de conjecture comme une résolution de problème.
- Laisser le temps aux élèves de s'investir.
- Accorder plus d'importance aux étapes de la démonstration qu'aux théorèmes.

Michelle Cirillo, « Ten Things to Consider When Teaching Proof », Mathematics Teacher, vol. 103, n° 4, novembre 2009, p. 250-257.

Apprivoiser la conjecture

Fréquence des expériences

- Apprentissage par exploration
- Culture de l'argumentation
- Progression dans les tâches proposées
- Adoption de diverses méthodes pédagogiques

Matériel didactique

- Utiliser et partager les exemples de la formation
- Modifier les questions des manuels et des cahiers d'exercices
- Travailler à partir des énoncés du Programme de formation

Exemples de tâches supplémentaires

Compléter une conjecture

→ On observe les relations entre les mesures des côtés et les mesures des angles dans un triangle rectangle.

Complétez l'énoncé suivant : Dans un triangle rectangle, la mesure du côté opposé à un angle de 30° est égale à

_____ .



Compléter une conjecture

→ On cherche une relation entre les mesures de côtés homologues, les aires totales ainsi que les volumes des solides semblables.

Complétez l'énoncé suivant : Le rapport entre les volumes de solides semblables est égal _____ .

Tâche de conjecture : réfutation

- L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse? Le produit de deux nombres entiers est supérieur ou égal à chacun de ces deux nombres.
- Jonathan affirme que toutes les réciproques des fonctions sont des fonctions. Montrez qu'il a tort.

Tâche de conjecture : réfutation

- Mario pense que dans les jeux de hasard, plus l'espérance mathématique est élevée, plus il y a de possibilités de gagner. A-t-il raison?
- Éléonore affirme que la somme de deux vecteurs a toujours une norme plus grande que ces deux vecteurs. A-t-elle raison?

Tâche de conjecture : validation

- Confirmez ou infirmez la relation suivante : pour représenter le produit d'expressions exponentielles ayant la même base, on conserve la base et on l'affecte d'un exposant correspondant à la somme des exposants des facteurs.
- Validez la conjecture suivante : la somme d'une suite de nombres impairs consécutifs commençant par 1 est un nombre carré.

Tâche de conjecture : validation

→ Robert remarque lorsque l'équation d'une ellipse est de la forme :

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

où a : demi-mesure de l'axe horizontal et b : demi-mesure de l'axe vertical et (h, k) sont les coordonnées du centre de l'ellipse, si $a > b$, alors l'ellipse est horizontale. Expliquez pourquoi.

Tâche de conjecture : formulation (émission)

- Quelle est la somme des mesures des angles extérieurs d'un triangle?
- Quel lien existe-t-il entre l'expression correspondant à la base de la règle d'une fonction exponentielle et les coordonnées des points sur la courbe dans cette fonction?

● Exemple de modification

- Énoncé du programme : La relation unissant le n^{e} terme d'une suite et la somme des n premiers termes de cette suite correspond à une fonction polynomiale de degré 2, soit la relation de Gauss : $\frac{n(n+1)}{2}$.
- Énoncé transformé en question de conjecture : Décrire le lien entre le n^{e} terme d'une suite et la somme des n premiers termes de cette suite.

Tous les liens

Site officiel du MEES : programmes de mathématique

education.gouv.qc.ca/enseignants/pfeq/secondaire/domaine-de-la-mathematique-de-la-science-et-de-la-technologie/mathematique/

Site du domaine de la mathématique

domaine.recitmst.qc.ca

Tous les liens

Site pour des questions du type QELI

wodb.ca

Site de la Semaine des maths de l'Université Laval

www.semainedesmaths.ulaval.ca



Pour nous joindre

Direction de la formation générale des jeunes

FGJ-math@education.gouv.qc.ca

Mariannik Toutant

Responsable des programmes d'études en mathématique

Geneviève Dupré

Conseillère pédagogique en prêt de services/domaine de la mathématique

Éducation
et Enseignement
supérieur

Québec 