Précisions sur les types de raisonnement à exploiter en mathématique au secondaire

Exemples de démarche illustrant les différents types de raisonnement

Québec

Le présent document a été produit par
le ministère de l’Éducation et de l’Enseignement supérieur.

Coordination et rédaction
Direction de la formation générale des jeunes
Direction générale des services à l’enseignement
Secteur de l’éducation préscolaire et de l’enseignement primaire et secondaire

Révision linguistique
Sous la responsabilité de la Direction des communications

Table des matières

Premier cycle

Confirmez ou infirmez l'énoncé suivant : Lorsqu'on ajoute deux nombres opposés dans une distribution statistique, la moyenne ne change pas.

➲ Exemple de démarche faisant appel à la réfutation à l'aide d'un contre-exemple

① Je souhaite vérifier l'énoncé à l'aide d'un exemple de distribution statistique. Je choisis la distribution suivante : $2, 3$ et 4.

② Je calcule la moyenne de la distribution.

La moyenne est égale à :
la somme des données ÷ le nombre total de données $= (2+3+4) \div 3 = 9 \div 3 = 3$.

La moyenne de la distribution de départ est 3.

③ Je vérifie si la moyenne change lorsque j'ajoute les nombres opposés suivants : 5 et -5.

La moyenne de ma nouvelle distribution est égale à $\big(2 + 3 + 4 + 5 + (-5)\big) \div 5 = 9 \div 5 = 1{,}8$.

④ Je conclus que l'énoncé est faux puisque j'ai trouvé un contre-exemple où, en ajoutant deux nombres opposés dans la distribution de départ, j'obtiens une moyenne différente ($3 \neq 1{,}8$).

Piste d'approfondissement : Une fois que l'élève a répondu adéquatement à la question, on peut lui demander si l'on obtient le même résultat lorsque tous les nombres de la distribution de départ sont négatifs.

➲ Exemple de démarche faisant appel à un raisonnement déductif

① J'identifie mes inconnues et ma variable.

n : Quantité de données dans la distribution de départ où $n \in \mathbb{N}^*$
a : Somme des données de la distribution de départ où $a \in \mathbb{R}$
x : Nombre quelconque où $x \in \mathbb{R}$
$-x$: Opposé du nombre quelconque

② Je calcule la moyenne de la distribution de départ.

La moyenne est égale à $\dfrac{\text{la somme des données}}{\text{le nombre total de données}} = \dfrac{a}{n}$

③ Si j'ajoute deux nombres opposés à la distribution, la moyenne devient égale à :

La somme de deux nombres opposés est égale à 0.

$$\frac{x + (-x) + a}{n + 2} = \frac{a}{n + 2}$$

④ Je compare les deux moyennes.

$$\frac{a}{n+2} \neq \frac{a}{n}$$

L'énoncé est donc faux. Lorsqu'on ajoute deux nombres opposés dans une distribution statistique, la moyenne change.

Un élève peut effectuer un raisonnement déductif sans utiliser une démarche algébrique. Il peut communiquer son raisonnement à l'aide de mots uniquement.

Piste d'approfondissement : Une fois que l'élève a répondu adéquatement à la question, on peut lui demander de trouver dans quel cas précis l'affirmation est vraie.

➲ Exemple de démarche faisant appel à un raisonnement par analogie

- Si j'ajoute deux nombres opposés à une somme, c'est comme si je n'ajoutais rien, car la somme de deux nombres opposés est toujours égale à zéro.

- Alors, si l'on ajoute les deux nombres opposés, la somme des données de la distribution reste la même.

- Pour calculer la moyenne, je dois diviser la somme des données par la quantité de données. Je devrai donc diviser la même somme par une plus grande valeur (deux données de plus). Par exemple, si je prends un gâteau et que je le coupe en 5 parties égales, j'aurai de plus gros morceaux que si je le coupe en 7 parties égales. Dans ce cas, la moyenne obtenue sera donc plus petite et non égale.

L'énoncé est donc faux. Lorsqu'on ajoute deux nombres opposés dans une distribution statistique, la moyenne change.

Pour cette question, nous n'avons pas fourni d'exemple de raisonnement inductif, car l'affirmation est fausse. Un élève qui ferait appel à ce type de raisonnement devrait aboutir à une réfutation à l'aide d'un contre-exemple.

L’affirmation suivante est-elle vraie ou fausse? La somme de deux nombres négatifs est toujours négative.

➲ Exemple de démarche faisant appel à un raisonnement par analogie

Pour mieux représenter les nombres négatifs, je choisis un contexte d’argent.

Hier, je n’avais pas d’argent et j’ai demandé à mon ami Louis de m’en prêter. Je me retrouve alors avec une dette (soit une valeur correspondante à un nombre négatif). Aujourd’hui, je n’ai toujours pas remboursé mon ami, mais je souhaite acheter une collation. Louis m’offre de me prêter un autre montant. J’ai donc une nouvelle dette (soit une deuxième valeur correspondante à un nombre négatif).

Si je fais le bilan de mes deux dettes (la somme de deux nombres négatifs), c’est comme si j’avais une seule grande dette (le résultat est toujours négatif).

Ainsi, l’affirmation est vraie. La somme de deux nombres négatifs est toujours négative, car si hier j’avais une dette et qu’aujourd’hui j’en acquiers une nouvelle, j’aurai alors une plus grande dette, soit une quantité d’argent inférieure à 0 $.

Dans les raisonnements par analogie, les explications ne reposent pas sur un seul exemple. Elles demeurent générales et couvrent le plus de cas possibles.

Troisième secondaire

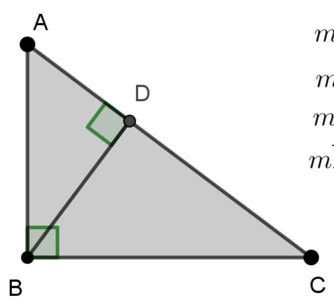
Dans un triangle rectangle, on trace une hauteur issue du sommet de l'angle droit. Formulez une relation entre les mesures des cathètes, de l'hypoténuse et de la hauteur tracée. Expliquez.

➲ Exemple de démarche faisant appel à un raisonnement inductif

J'utilise des triplets pythagoriciens et un logiciel de géométrie dynamique pour construire deux triangles rectangles différents et déterminer la mesure des hauteurs issues de l'angle droit.

Pour m'assurer d'avoir des exemples variés, j'évite de prendre des triangles semblables.

Exemple 1



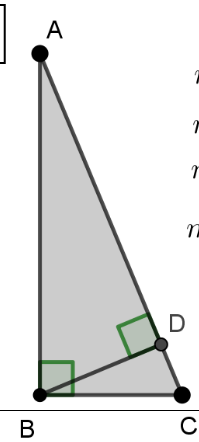
$m\overline{AB} = 3\text{cm}$

$m\overline{AC} = 5\text{cm}$

$m\overline{BC} = 4\text{cm}$

$m\overline{BD} = 2,4\text{cm}$

Exemple 2



$m\overline{AC} = 13\text{cm}$

$m\overline{AB} = 12\text{cm}$

$m\overline{BC} = 5\text{cm}$

$m\overline{BD} = \frac{60}{13}\text{ cm}$

Je remarque que $\begin{array}{c} 3 \times 4 = 2{,}4 \times 5 \\ 12 = 12 \end{array}$ et que $\begin{array}{c} 12 \times 5 = \frac{60}{13} \times 13 \\ 60 = 60 \end{array}$

Dans mes deux exemples, ***le produit des cathètes est égal au produit de l'hypoténuse et de la hauteur issue du sommet de l'angle droit***.

Ma relation semble adéquate puisque, pour calculer l'aire d'un triangle, on peut utiliser n'importe lequel de ses trois côtés comme base et la hauteur qui y correspond.

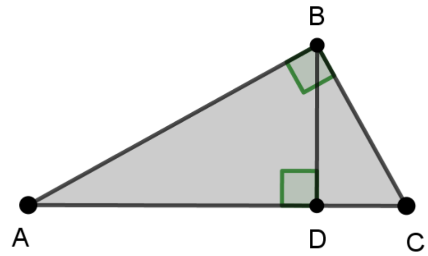
Voici le calcul de l'aire du triangle rectangle si la base est

une cathète :	l'hypoténuse :
Aire du triangle ABC = $\frac{m\,\overline{BC} \cdot m\,\overline{AB}}{2}$	Aire du triangle ABC = $\frac{m\,\overline{AC} \cdot m\,\overline{BD}}{2}$

Puisque l'aire demeure la même, peu importe le côté utilisé comme base, on obtient $\frac{m\,\overline{BC} \cdot m\,\overline{AB}}{2} = \frac{m\,\overline{AC} \cdot m\,\overline{BD}}{2}$, ce qui signifie que $\overline{BC} \cdot m\,\overline{AB} = m\,\overline{AC} \cdot m\,\overline{BD}$, soit ma relation énoncée.

➲ Exemple de démarche faisant appel à un raisonnement déductif

Soit un triangle rectangle scalène ABC, rectangle en B, dans lequel je trace une hauteur $(\overline{BD})$ issue du sommet de l'angle droit.



Je remarque que la hauteur forme deux autres triangles rectangles soit les triangles ADB et BDC. De plus,

1. $m\angle BAC = m\angle BAD$	1. Angle commun aux triangles ABC et ADB
2. $m\angle ABC = m\angle ADB = 90°$	2. Par la définition d'un triangle rectangle et d'une hauteur.
3. a) $m\angle ACB = 90° - m\angle BAC$ b) $m\angle DBA = 90° - m\angle BAD$	3. Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.
4. $m\angle ACB = m\angle DBA$	4. Je soustrais la même mesure de 90°, car $m\angle BAC = m\angle BAD$ (prouvée à l'étape 1).

Les triangles ADB et ABC sont semblables, car ils ont trois angles isométriques. Les mesures des côtés homologues me permettent de trouver le rapport de similitude entre les deux triangles.

Rapport de similitude : $\frac{m\,\overline{AB}}{m\,\overline{AD}} = \boxed{\frac{m\,\overline{BC}}{m\,\overline{DB}} = \frac{m\,\overline{AC}}{m\,\overline{AB}}}$

Je choisis cette proportion pour observer la relation demandée puisque ses composantes représentent les mesures des cathètes, de l'hypoténuse et de la hauteur tracée, soient les éléments de la consigne.

Donc, le rapport entre la plus petite cathète et la hauteur issue de l'angle droit est égal au rapport entre l'hypoténuse et la plus grande cathète.

Cette tâche peut aussi être proposée à un élève du premier cycle si le travail de construction est réalisé à partir d'une application de géométrie dynamique ou à un élève de quatrième secondaire qui ne connait pas encore les relations métriques dans les triangles rectangles.

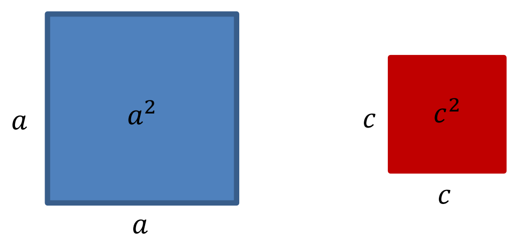
Quatrième secondaire

Démontrez que les expressions suivantes sont équivalentes :

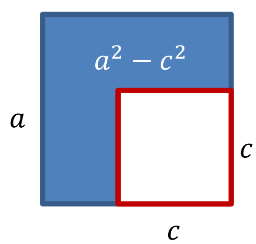
$$\boldsymbol{(a^2 - c^2)\ et\ (a + c)(a - c)}$$

➲ Exemple de démarche faisant appel à un raisonnement par analogie

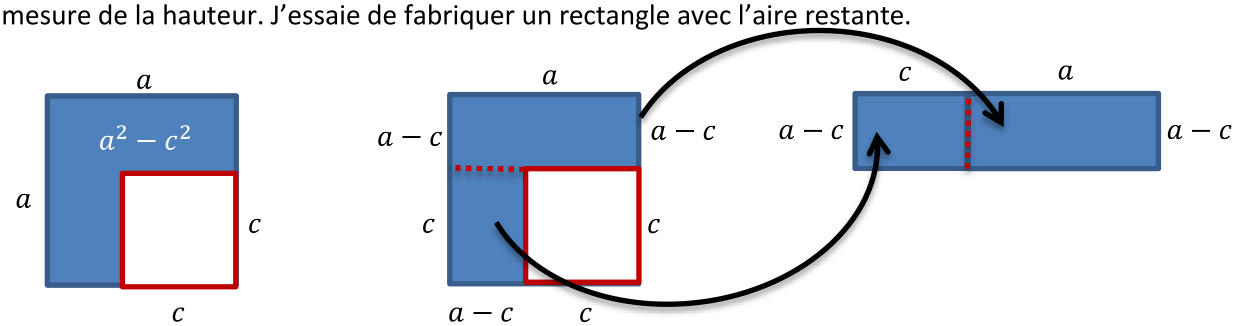
Le binôme $(a^2 - c^2)$ correspond à une différence de deux termes au carré. Je représente cette expression à l'aide de tuiles algébriques où a^2 représente un carré dont la mesure de ses côtés est de a unités et c^2 représente un carré dont la mesure de ses côtés est de c unités.



Pour représenter la différence $(a^2 - c^2)$, j'enlève l'aire du carré rouge (c^2) à l'aire du carré bleu (a^2). Géométriquement, j'obtiens la surface bleue restante.



L'expression $(a + c)(a - c)$ est le produit de deux facteurs. Elle doit aussi représenter l'aire de la surface bleue restante. Je sais que l'aire d'un rectangle se calcule comme étant le produit de la mesure de la base et de la mesure de la hauteur. J'essaie de fabriquer un rectangle avec l'aire restante.



Les dimensions du rectangle obtenu sont de $(a + c)$ et $(a - c)$. On peut calculer l'aire de la surface restante en multipliant la mesure de la base et de la mesure de la hauteur $(a + c)(a - c)$ ou en soustrayant d'un carré l'aire d'un autre carré soit $(a^2 - c^2)$. Ainsi, $(\mathrm{a}^2 - \mathrm{c}^2) = (\mathrm{a} + \mathrm{b})(\mathrm{a} - \mathrm{c})$.

➲ Exemple de démarche faisant appel à un raisonnement déductif appuyé par une preuve algébrique

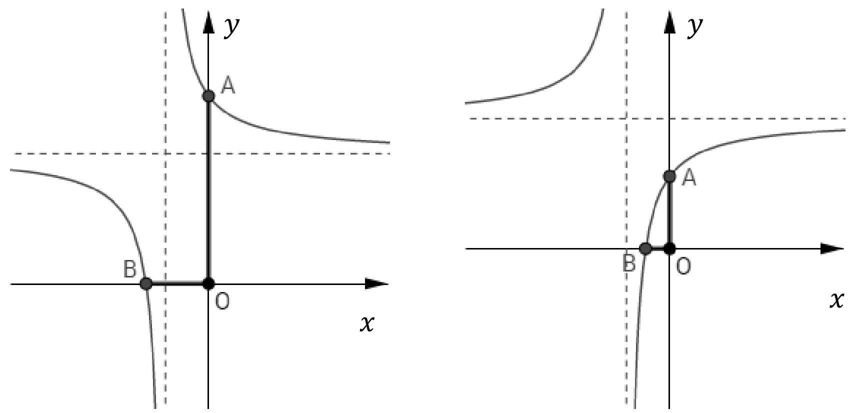
En développant l'expression $(a+c)(a-c)$, j'obtiens :

$(a+c)(a-c)$	$=$	$a(a-c)+c(a-c)$	Double distributivité
	$=$	$a^2-ac+ac-c^2$	Distributivité de la multiplication sur l'addition
	$=$	a^2-c^2	Réduction par l'addition des termes semblables

Par une suite de manipulations algébriques reposant sur les propriétés de la multiplication et de l'addition de termes, j'ai démontré que $(a^2-c^2)=(a+c)(a-c)$.

Cinquième secondaire

Ci-dessous se trouvent deux représentations graphiques possibles d'une fonction rationnelle. Conjecturez à propos du lien entre le rapport $\frac{m\,\overline{OA}}{m\,\overline{OB}}$ et les paramètres *h* et *k* de la règle de la fonction.



➲ Exemple de démarche faisant appel à un raisonnement inductif

Soit la règle de la fonction rationnelle sous la forme canonique $f(x) = a\left(\frac{1}{b(x-h)}\right) + k$

1. J'effectue quelques exemples avec des valeurs de h et k variées (valeurs positives et négatives, rationnelles et irrationnelles).

Exemple ① Je pose $a = 1$, $b = 1$, $h = 4$ et $k = 2$

J'obtiens : $f(x) = \frac{1}{(x-4)} + 2$

Ordonnée à l'origine ($m\,\overline{OA}$)

$$f(0) = \frac{1}{(0-4)} + 2$$

$$f(0) = \frac{7}{4}$$

Abscisse à l'origine ($m\,\overline{OB}$)

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{(x-4)} + 2 \\
-2 &= \frac{1}{(x-4)} \\
-2(x-4) &= 1 \\
-2x + 8 &= 1 \\
-2x &= -7 \\
x &= \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

- $m\,\overline{OA} = \frac{7}{4}$
- $m\,\overline{OB} = \frac{7}{2}$
- $\boxed{\frac{m\,\overline{OA}}{m\,\overline{OB}} = \frac{7/4}{7/2} = \frac{2}{4}}$

Le rapport $\frac{m\,\overline{OA}}{m\,\overline{OB}}$ est égal au rapport $\frac{k}{h}$ dans cet exemple. Je vais vérifier si c'est vrai dans d'autres cas.

Exemple ② Je pose $a = 1$, $b = 1$, $h = -5$ et $k = \frac{6}{7}$

J'obtiens : $f(x) = \frac{1}{(x+5)} + \frac{6}{7}$

Ordonnée à l'origine ($m\,\overline{OA}$)

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{5} + \frac{6}{7} \\ f(0) &= \frac{37}{35} \end{aligned}$$

Abscisse à l'origine ($m\,\overline{OB}$)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{(x+5)} + \frac{6}{7} \\ -\frac{6}{7} &= \frac{1}{(x+5)} \\ -6(x+5) &= 7 \\ -6x - 30 &= 7 \\ -6x &= 37 \\ x &= -\frac{37}{6} \end{aligned}$$

- $m\,\overline{OA} = \frac{37}{35}$
- $m\,\overline{OB} = -\frac{37}{6}$
- $\boxed{\frac{m\,\overline{OA}}{m\,\overline{OB}} = \frac{37/35}{-37/6} = -\frac{6}{35}}$

Je vérifie si, dans l'exemple ②, $\frac{m\,\overline{OA}}{m\,\overline{OB}}$ est égal au rapport entre les valeurs des paramètres *k* et *h* :

$\frac{k}{h} = \frac{6/7}{-5} = -\frac{6}{35}$. C'est encore vrai.

Je me demande si c'est toujours vrai, même si la valeur des paramètres *a* et *b* est différente de 1.

Exemple ③ Je pose $a = -2$, $b = 9$, $h = \frac{7}{3}$ et $k = \sqrt{2}$

J'obtiens : $f(x) = \frac{-2}{9(x-7/3)} + \sqrt{2}$

Ordonnée à l'origine ($m\,\overline{OA}$)

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{-2}{9(-7/3)} + \sqrt{2} \\ f(0) &= \frac{-2}{-21} + \sqrt{2} \\ f(0) &= \frac{2 + 21\sqrt{2}}{21} \end{aligned}$$

Abscisse à l'origine ($m\,\overline{OB}$)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{-2}{9(x-7/3)} + \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} &= \frac{-2}{9(x-7/3)} \\ -9\sqrt{2}(x-7/3) &= -2 \\ -9\sqrt{2}x + 21\sqrt{2} &= -2 \\ -9\sqrt{2}x &= -2 - 21\sqrt{2} \\ x &= \frac{-2-21\sqrt{2}}{-9\sqrt{2}} \\ x &= \frac{21+\sqrt{2}}{9} \end{aligned}$$

- $m\,\overline{OA} = \frac{2+21\sqrt{2}}{21}$
- $m\,\overline{OB} = \frac{21+\sqrt{2}}{9}$
- $\boxed{\frac{m\,\overline{OA}}{m\,\overline{OB}} = \frac{\frac{2+21\sqrt{2}}{21}}{\frac{21+\sqrt{2}}{9}} = \frac{3\sqrt{2}}{7}}$

$$\frac{2+21\sqrt{2}}{21} \div \frac{21+\sqrt{2}}{9} =$$

$$\frac{2+21\sqrt{2}}{21} \times \frac{9}{21+\sqrt{2}} =$$

$$\frac{(6+63\sqrt{2})\cdot(147-7\sqrt{2})}{(147+7\sqrt{2})\cdot(147-7\sqrt{2})} =$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{7}$$

Vérifions si mon observation est encore vraie. Dans l'exemple 3, le rapport $\frac{k}{h} = \frac{\sqrt{2}}{7/3} = \frac{3\sqrt{2}}{7}$, soit le rapport $\frac{m\,\overline{OA}}{m\,\overline{OB}}$.

2. Pour les fonctions rationnelles, je peux établir la conjecture suivante : le rapport entre l'ordonnée à l'origine et l'abscisse à l'origine $\left(\frac{m\,\overline{OA}}{m\,\overline{OB}}\right.$ dans la question$\left.\right)$ est égal au rapport entre la valeur des paramètres *k* et *h*, soit $\frac{m\,\overline{OA}}{m\,\overline{OB}} = \frac{k}{h}$.

   Toutefois, je remarque que l'abscisse à l'origine et le paramètre h ne peuvent pas avoir une valeur de zéro puisque j'obtiendrais des rapports indéfinis (la division par zéro étant impossible). Pour les mêmes raisons, la fonction ne doit pas passer par l'origine. Pour calculer $m\,\overline{OA}$, il faut avoir une ordonnée à l'origine. Il faut donc que la valeur du paramètre k de la fonction soit également différente de zéro. La fonction doit donc avoir subi une translation horizontale et une translation verticale.

Pour cette question, l'exploration à l'aide d'exemples permet d'amorcer la réflexion. Pour conclure son raisonnement inductif, l'élève devra s'appuyer sur des propriétés propres aux hyperboles afin de faire ressortir les contraintes dans lesquelles sa conjecture est vraie. Dans la démarche présentée ci-haut, la conjecture n'est pas encore prouvée.

➲ Exemple de démarche faisant appel à un raisonnement déductif

Soit la règle de la fonction rationnelle sous la forme canonique $f(x) = a\left(\frac{1}{b(x-h)}\right) + k$ où $b \neq 0$

① S'il n'y a pas de translation horizontale ni de translation verticale de la fonction centrée à l'origine, les points A et B (points d'intersection avec les axes) n'existent pas. Alors, le rapport $\frac{m\,\overline{OA}}{m\,\overline{OB}}$ est indéfini, car l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées sont aussi les asymptotes horizontale et verticale de la fonction. Pour que la fonction passe par chacun des axes, les valeurs des paramètres k et h doivent donc être différentes de zéro. De plus, si l'abscisse à l'origine ($m\,\overline{OB}$) est zéro, le rapport sera également indéfini (la division par zéro étant impossible). La démonstration qui suit est vraie si la fonction rationnelle ne passe pas par l'origine du plan cartésien.

② Pour déterminer la $m\overline{OA}$, trouvons l'ordonnée à l'origine :

Posons $x = 0$ dans $f(x) = a\left(\frac{1}{b(x-h)}\right) + k$

$$f(0) = a\left(\frac{1}{b(0-h)}\right) + k$$

$$f(0) = -\frac{a}{bh} + k$$

L'ordonnée à l'origine est $-\frac{a}{bh} + k$.

Donc, $m\overline{OA} = -\frac{a}{bh} + k$.

③ Pour déterminer la $m\overline{OB}$, trouvons l'abscisse à l'origine :

Posons $f(x) = 0$ dans $f(x) = a\left(\frac{1}{b(x-h)}\right) + k$

$$\begin{aligned}
0 &= a\left(\frac{1}{b(x-h)}\right) + k \\
-k &= \frac{a}{b(x-h)} \\
-kb(x-h) &= a \\
-kbx + kbh &= a \\
kbh &= a + kbx \\
kbh - a &= kbx \\
h - \frac{a}{kb} &= x
\end{aligned}$$

L'abscisse à l'origine est $h - \frac{a}{bk}$.

Donc, $m\overline{OB} = h - \frac{a}{bk}$.

④ Calculons la valeur du rapport $\frac{m\,\overline{OA}}{m\,\overline{OB}}$:

$$\frac{m\,\overline{OA}}{m\,\overline{OB}} = m\,\overline{OA} \div m\,\overline{OB} = \left(-\frac{a}{bh} + k\right) \div \left(h - \frac{a}{bk}\right) =$$

$$\left(\frac{-a}{bh} + \frac{bhk}{bh}\right) \div \left(\frac{bhk}{bk} - \frac{a}{bk}\right) = \left(\frac{-a + bhk}{bh}\right) \div \left(\frac{bhk - a}{bk}\right) =$$

$$\left(\frac{-a + bhk}{bh}\right) \cdot \left(\frac{bk}{bhk - a}\right) = \frac{-abk + b^2hk^2}{b^2h^2k - abh} = \frac{bk(-a + bhk)}{bh(bhk - a)} = \frac{k}{h}$$

La valeur du rapport $\frac{m\,\overline{OA}}{m\,\overline{OB}} = \frac{k}{h}$.

À la lumière de ma preuve algébrique, voici ma conjecture :

Si $h \neq 0$, $k \neq 0$ et que la fonction ne passe pas par l'origine, alors le rapport $\frac{m\,\overline{OA}}{m\,\overline{OB}}$ est égal au rapport entre la valeur du paramètre *k* et la valeur du paramètre *h* $\left(\frac{m\,\overline{OA}}{m\,\overline{OB}} = \frac{k}{h}\right)$.