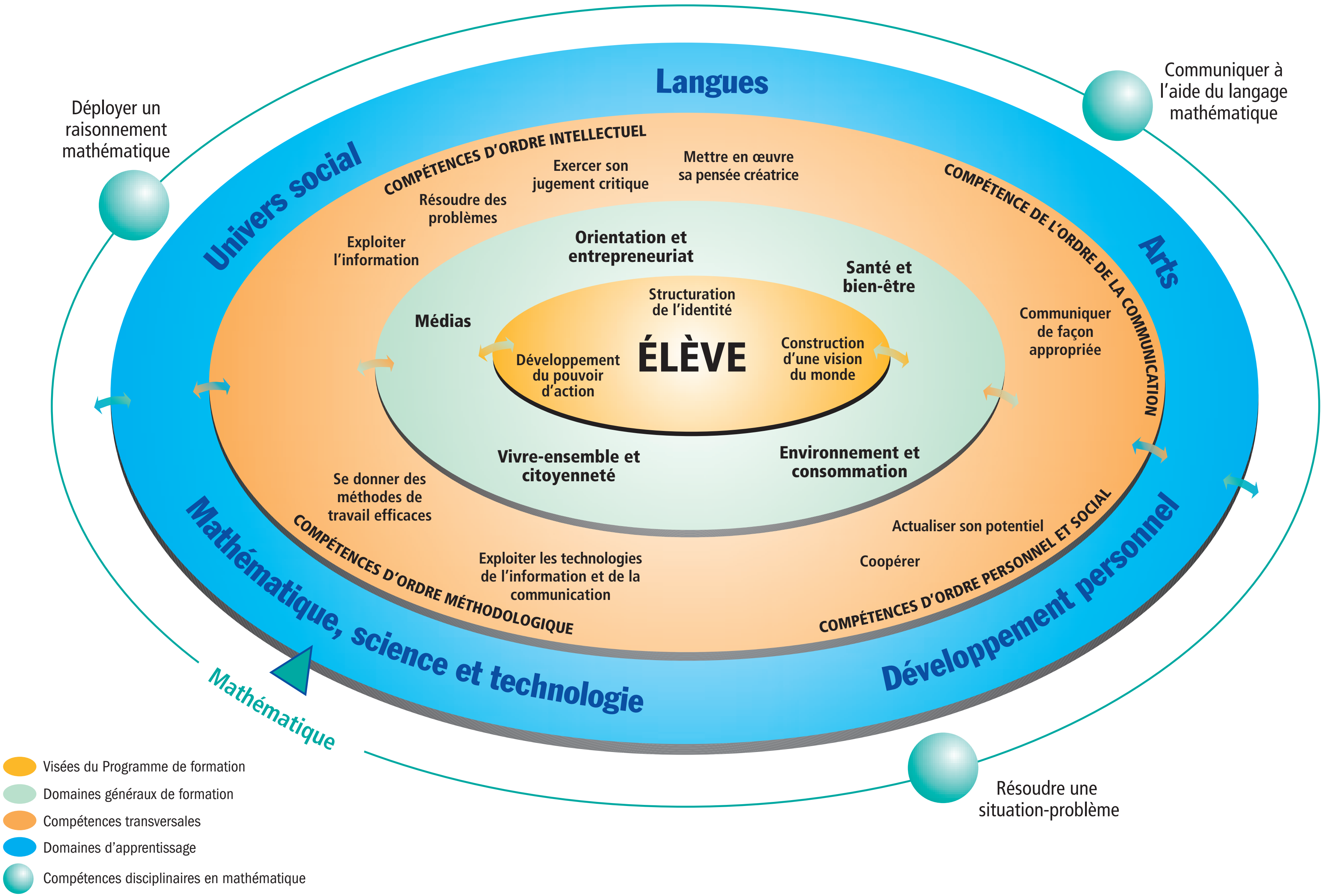
Mathématique

Apport du programme de mathématique au Programme de formation



Présentation de la discipline

La mathématique est une vaste aventure de la pensée; son histoire reflète quelques-unes des idées les plus nobles d'innombrables générations.

Dirk J. Struik

La mathématique, science et langage universel, permet d'appréhender la réalité. Elle concourt de façon importante au développement intellectuel de l'individu et contribue de ce fait à structurer son identité. Sa maîtrise constitue un atout majeur pour s'intégrer dans une société qui tire profit de ses nombreuses retombées et elle demeure essentielle à la poursuite des études dans certains domaines.

La mathématique se trouve dans une multitude d'activités de la vie courante : on s'en sert dans les médias, les arts, l'architecture, la biologie, l'ingénierie, l'informatique, les assurances, la conception d'objets divers, etc. On ne saurait toutefois apprécier et saisir cette omniprésence sans acquérir certaines connaissances de base dans les différents champs de la mathématique : arithmétique, algèbre, probabilité, statistique et géométrie. Parce qu'elles permettent de reconnaître la place occupée par la mathématique dans la réalité de tous les jours, ces connaissances représentent pour chacun une occasion d'enrichir sa vision du monde.

La diversité des situations que la mathématique aborde ou à partir desquelles elle dégage ses structures donne un aperçu de l'envergure des liens qu'elle entretient avec les autres domaines d'apprentissage. Elle permet d'interpréter les quantités grâce à l'arithmétique et à l'algèbre, l'espace et les formes grâce à la géométrie et les phénomènes aléatoires grâce à la statistique et aux probabilités. C'est ainsi qu'elle manifeste sa présence dans des domaines aussi divers que les arts, l'univers social, les langues, le développement personnel, la science et la technologie.

Depuis 1994, l'enseignement de la mathématique au Québec a pour objectif d'amener l'élève à gérer une situation-problème, à raisonner, à établir des liens et à communiquer. Tout comme dans le cas du Programme de formation du primaire, ces objectifs dits globaux sont ici réactualisés et consolidés. En effet, le présent programme est axé sur le développement de trois compétences intimement liées, analogues à celles qu'on trouve dans le programme du primaire :

- Résoudre une situation-problème;
- Déployer un raisonnement mathématique;
- Communiquer à l'aide du langage mathématique.

La résolution de situations-problèmes est au cœur des activités mathématiques comme de celles de la vie quotidienne. Elle est observée sous deux angles. D'une part, elle est considérée comme un processus, d'où la compétence *Résoudre une situation-problème*. D'autre part, en tant que modalité pédagogique, elle soutient la plupart des démarches d'apprentissage de la discipline. Elle revêt une importance toute particulière du fait que le traitement des concepts mathématiques nécessite un raisonnement logique appliqué à des situations-problèmes.

La compétence *Déployer un raisonnement mathématique* est la pierre angulaire de toute activité mathématique. Dans le cas des situations d'apprentissage (situations d'application, situations-problèmes ou autres activités), l'élève qui déploie un raisonnement mathématique structure sa pensée en intégrant un ensemble de savoirs et leurs interrelations. Le raisonnement développé au secondaire est à la fois analogique, inductif et déductif. Il est analogique dans la mesure où l'élève est amené à percevoir et à exploiter des similitudes entre des objets de divers champs de la mathématique. Il est inductif en ce sens que l'élève doit dégager des règles ou des lois à partir de ses observations. Enfin, il est déductif dans la mesure où l'élève doit apprendre à dégager une conclusion à partir d'hypothèses et d'énoncés déjà admis.

Le développement des deux premières compétences nécessite le recours à la compétence *Communiquer à l'aide du langage mathématique*. Un double objectif est poursuivi. Le premier consiste à s'approprier des éléments du langage mathématique : les définitions, les modes de représentation, les symboles et les notations, l'élève étant également appelé à apprendre de nouveaux mots ainsi que les différents sens d'un mot connu. Le deuxième réside dans l'habileté à produire un message pour expliquer une démarche ou un raisonnement.

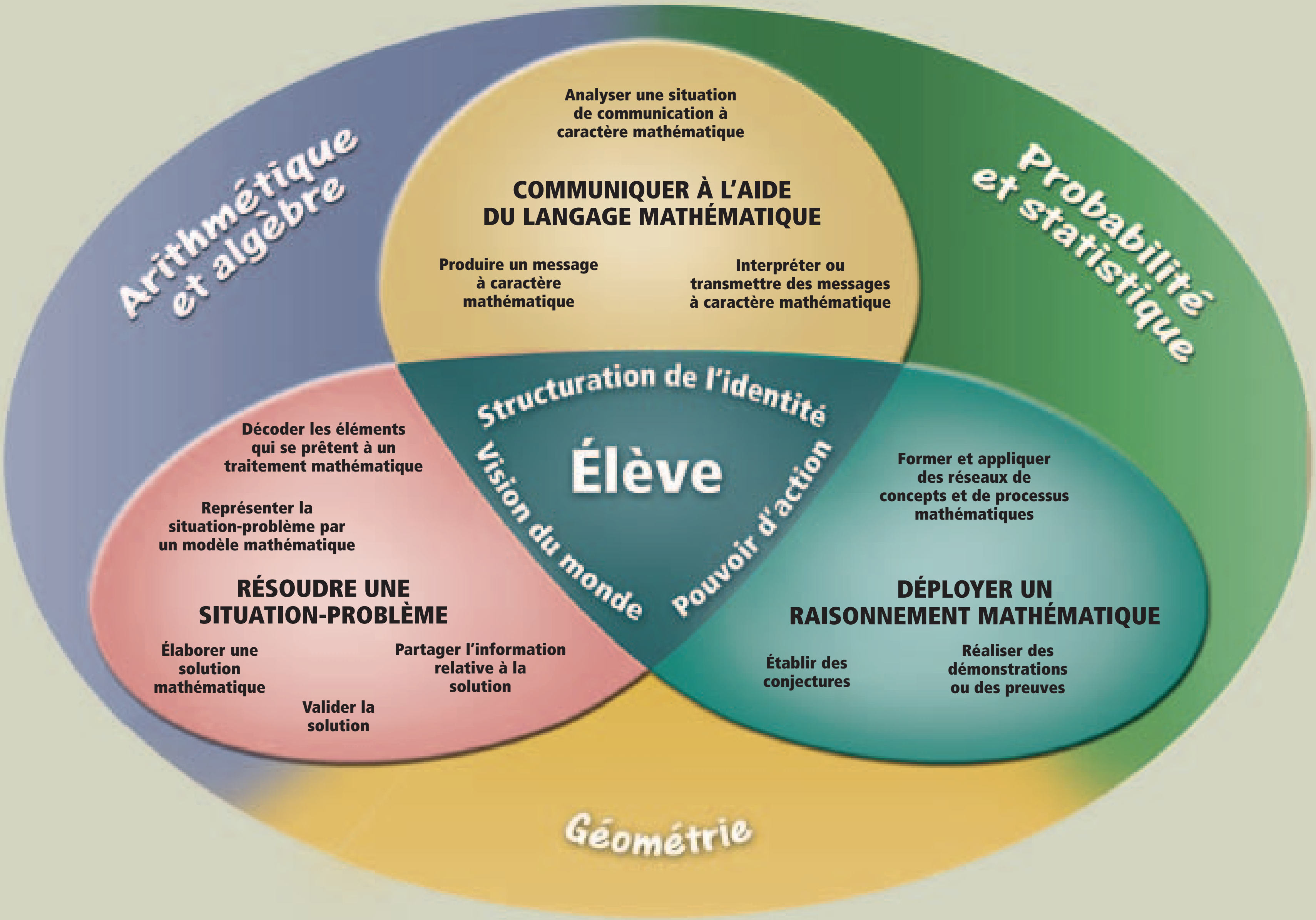
Bien que les trois compétences du programme soient concrètement réunies dans la pensée mathématique, elles se distinguent par le fait qu'elles en ciblent différents aspects. Cette distinction devrait faciliter la structuration de l'intervention pédagogique, sans toutefois entraîner un traitement cloisonné des éléments propres à chacune des compétences. De plus, si la spécificité de la mathématique, comme langage et comme outil d'abstraction, exige de traiter de façon abstraite les relations entre les objets ou les éléments de situations, son enseignement au secondaire est plus efficace lorsqu'il prend appui sur des objets concrets ou des éléments de situations tirées de la réalité.

Le recours à la technologie (calculatrice, ordinateur, etc.) peut constituer une aide précieuse pour soutenir la démarche de l'élève dans le traitement d'une situation donnée. En permettant l'exploration, la simulation et la représentation de situations plus nombreuses et plus diversifiées, la technologie favorise aussi bien l'émergence que la compréhension de concepts et de processus mathématiques. Elle augmente l'efficacité des élèves dans les tâches qui leur sont proposées et facilite la communication.

Par ailleurs, le développement de la mathématique étant étroitement lié à l'évolution de l'humanité, son enseignement doit intégrer la dimension historique. Les élèves pourront ainsi mieux en saisir le sens et l'utilité. Ils découvriront comment sa transformation au fil du temps et la création de certains instruments sont directement ou indirectement liées à des besoins ressentis dans les sociétés. L'histoire devrait permettre à l'élève de comprendre que les savoirs mathématiques sont le fruit de longs travaux menés par des chercheurs passionnés par cette discipline, qu'ils soient mathématiciens, philosophes, physiciens, artistes ou autres.

Le schéma qui suit représente l'interaction entre les compétences visées, le contenu mathématique et la formation de l'élève.

CONTRIBUTION DE L'APPRENTISSAGE DE LA MATHÉMATIQUE À LA FORMATION DE L'ÉLÈVE



Relations entre la mathématique et les autres éléments du Programme de formation

Sans l'aide de la mathématique, poursuivit le sage, les arts ne peuvent progresser et toutes les autres sciences péréclitent.
Júlio César de Mello e Souza alias Malba Tahan

Présente au quotidien sous diverses formes, la mathématique l'est également dans une multitude d'éléments constitutifs du Programme de formation. Cette présence est double, c'est-à-dire que la mathématique puise dans plusieurs de ces éléments et y contribue tout à la fois. Ainsi, à partir de thèmes inspirés des domaines généraux de formation, l'élève est invité à résoudre des situations-problèmes, à déployer un raisonnement mathématique et à utiliser les éléments du langage mathématique pour clarifier et expliquer différentes problématiques liées à sa vie et à ses préoccupations.

Relations avec les domaines généraux de formation

Grâce à une diversité de situations d'apprentissage, l'élève aura la possibilité d'établir des liens entre, d'une part, les compétences et les savoirs mathématiques et, d'autre part, certaines questions issues des domaines généraux de formation ou des domaines disciplinaires. Les exemples suivants illustrent certains de ces liens.

Orientation et entrepreneuriat

Lorsqu'il résout des situations-problèmes, l'élève apprend à mener à terme des projets. Cette habileté contribue à son épanouissement personnel et à son insertion dans la société. Sur une petite échelle, la résolution d'une situation-problème l'aide à prendre conscience de son identité et de son potentiel. Sur une plus grande échelle, par exemple dans la réalisation de projets interdisciplinaires, il mobilise et réinvestit des stratégies ainsi que des savoirs mathématiques associés à ces projets, tout en poursuivant son développement personnel. Il découvre ainsi, petit à petit, la place de la mathématique dans la société.

Vivre-ensemble et citoyenneté

L'élève est amené à participer à la vie démocratique de son école ou de sa classe et à développer ses attitudes d'ouverture sur le monde et de respect de la diversité. Au moment d'élaborer les règles de vie en société, à l'école ou dans la classe, l'élève peut faire appel, entre autres, à la statistique. C'est l'occasion, par exemple, de recueillir et d'analyser l'opinion des autres pour enrichir sa compréhension de différents problèmes et pour alimenter son argumentation en vue d'une prise de décision éclairée.

Consommation

L'élève est convié à entretenir un rapport dynamique avec son milieu, tout en gardant une distance critique à l'égard des biens de consommation. À l'aide notamment de son sens du nombre et de son raisonnement proportionnel, il interprète des pourcentages, des taux et des indices afin de juger, par exemple, des taxes, des modalités de paiement ou des rabais qui lui sont offerts. Il a ainsi l'occasion de mettre à profit son jugement critique et d'élaborer des stratégies de consommation et d'utilisation responsable de biens et de services.

Médias

Le développement du sens éthique et critique, notamment à l'égard des médias, est favorisé par l'exercice du raisonnement mathématique. En mobilisant différents modes de représentation de même que les raisonnements proportionnel, probabiliste et statistique, l'élève peut établir des comparaisons et jauger l'écart entre la réalité et l'idée que certains s'en font. La réalisation de sondages l'aide à comprendre comment leurs résultats constituent des sources d'information dont peuvent s'inspirer les médias pour élaborer articles et éditoriaux.

Santé et bien-être

Incité à adopter une démarche réflexive dans le développement de saines habitudes de vie, l'élève doit, pour ce faire, interpréter différents messages. Ses acquis dans le domaine de la statistique et des probabilités peuvent alors l'aider à juger de l'importance relative de ses habitudes de vie pour sa santé, en comparaison d'autres facteurs, ou de l'efficacité relative d'un traitement ou d'un médicament. Il est souvent invité à communiquer le bilan de ses démarches. La compétence *Communiquer à l'aide du langage mathématique* est alors également sollicitée pour l'analyse des données et leur représentation sous différents modes, de manière à faciliter l'exercice du regard critique et le partage d'informations et de points de vue.

Environnement

Entretenir un rapport dynamique avec son milieu fait partie des attitudes que l'on souhaite voir l'élève adopter. En faisant appel à ses aptitudes mathématiques en matière de notation et de représentation, telles que la réalisation de plans, la reproduction à l'échelle ou l'illustration par des diagrammes, il peut manifester sa compréhension de caractéristiques environnementales et de phénomènes de son milieu ou de l'interdépendance de l'environnement et de l'activité humaine.

Relations avec les compétences transversales

Lorsqu'il exerce ses compétences mathématiques, l'élève développe l'ensemble des compétences transversales dont celle qui consiste à résoudre des problèmes. Cette dernière constitue toutefois un cas particulier en ce sens qu'elle partage plusieurs éléments de stratégie avec la compétence mathématique *Résoudre une situation-problème*. Malgré leurs contenus différents, ces deux compétences cernent de façon analogue le questionnement et la réflexion, et sont donc des compétences aux retombées convergentes. L'élève développe également la compétence transversale qui consiste à mettre en œuvre sa pensée créatrice et celles qui touchent le traitement de l'information, la recherche de l'efficacité dans le travail et l'habileté à communiquer.

Relations avec les autres disciplines

Le fait d'établir des liens entre la mathématique et d'autres disciplines permet d'enrichir et de contextualiser les situations d'apprentissage dans lesquelles l'élève est appelé à développer ses compétences. En retour, les autres disciplines peuvent exploiter certains éléments du contenu de formation du présent programme, notamment les différents modes de représentation, le raisonnement proportionnel, le sens spatial et le traitement de données.

Les exemples qui témoignent de la multiplicité des liens existant entre la mathématique et certaines autres compétences disciplinaires du Programme de formation sont nombreux. En science et technologie, par exemple, l'élève qui met à profit ses connaissances scientifiques et technologiques sollicite aussi ses aptitudes à déployer un raisonnement mathématique et à communiquer à l'aide du langage mathématique lorsqu'il tente d'expliquer des phénomènes au moyen de schémas ou de modèles mathématiques.

En enseignement moral ou religieux, l'élève qui se positionne, de façon réfléchie, au regard d'enjeux d'ordre éthique peut être amené à déployer un raisonnement mathématique s'il doit réaliser un sondage. Il emploie également son aptitude à communiquer à l'aide du langage mathématique en interprétant certaines données qui lui sont présentées.

La création d'images personnelles ou médiatiques en arts plastiques se prête bien au raisonnement géométrique et à l'exploitation de concepts et de processus mathématiques, puisqu'il faut organiser dans l'espace des formes bidimensionnelles et tridimensionnelles.

En géographie, lorsqu'il s'agit de lire l'organisation d'un territoire, l'élève fait appel à ses compétences et aux concepts mathématiques pour traiter des données de nature statistique ou autre, ou pour lire et interpréter des cartes ou des graphiques. Dans le cas de l'histoire, la mathématique aide à apprécier la portée de la ligne du temps et, réciproquement, l'histoire contribue à la compréhension de l'évolution des grands concepts mathématiques.

Finalement, mentionnons que la maîtrise de la langue ainsi que de différentes stratégies liées au domaine des langues contribue au développement et à l'exercice des compétences mathématiques.

Le schéma qui suit illustre des liens entre la mathématique et les autres disciplines.

VISION SYSTÉMIQUE DE LIENS INTERDISCIPLINAIRES

MATHÉMATIQUE

- **Résoudre une situation-problème**
- **Déployer un raisonnement mathématique**
- **Communiquer à l'aide du langage mathématique**

ARTS

Musique

- Sens du nombre dans la compréhension du code musical

Art dramatique

- Raisonnement proportionnel
- Sens spatial

Arts plastiques

- Figures et transformations géométriques
- Sens spatial
- Raisonnement proportionnel
- Repères culturels

Danse

- Figures et transformations géométriques
- Sens spatial

DÉVELOPPEMENT PERSONNEL

Éducation physique et à la santé

- Sens du nombre dans l'interprétation d'information
- Traitement et analyse de données
- Repères culturels
- Sens spatial

Enseignement moral et religieux

- Sens du nombre dans l'interprétation d'information
- Traitement et analyse de données
- Repères culturels

UNIVERS SOCIAL

Géographie, histoire et éducation à la citoyenneté

- Sens du nombre dans l'interprétation de données statistiques
- Raisonnement proportionnel : échelle des cartes
- Traitement de données : questionnement, collecte, organisation, représentation, interprétation et analyse
- Sens spatial : représentations 2D et 3D, repérage de points sur un axe et dans un plan, transformations géométriques et unités de mesure

LANGUE D'ENSEIGNEMENT

- Lecture et appréciation de textes variés
- Écriture de textes variés
- Communication orale selon des modalités variées
- Lecture et écriture de nombres, d'énoncés et de conjectures
- Compréhension d'une situation-problème
- Recours à différents modes de représentation
- Interprétation et organisation de données qualitatives et quantitatives
- Argumentation, justification et réfutation

SCIENCE ET TECHNOLOGIE

- Sens du nombre et des opérations
- Raisonnement proportionnel (ex. plan, conversion d'unités de mesure)
- Généralisation et construction de formules
- Sens spatial (ex. plan, objet technologique)
- Traitement de données : questionnement, collecte, organisation, représentation, interprétation et analyse de données tirées d'expériences

Contexte pédagogique

Il y a une joie réelle à faire des mathématiques, à apprendre de nouvelles méthodes de pensée qui expliquent, organisent et simplifient. On peut ressentir cette joie en découvrant de nouvelles mathématiques, […] ou en trouvant une nouvelle façon d'expliquer […] une structure mathématique ancienne.

William P. Thurston

Des situations d'apprentissage et d'évaluation ouvertes sur la complexité

Les trois compétences du programme de mathématique sont interdépendantes et se développent de façon synergique. Un tel développement est particulièrement favorisé par des situations d'apprentissage qui, d'une part, misent sur la participation active de l'élève et le recours au processus de résolution de problèmes et qui, d'autre part, offrent une certaine flexibilité tant dans le choix des modes de représentation que dans le passage d'un mode de représentation à un autre.

L'élève est actif lorsqu'il s'engage dans des activités de réflexion, de manipulation, d'exploration, de construction ou de simulation et qu'il participe à des discussions au cours desquelles il peut justifier des choix, comparer des résultats et tirer des conclusions. Il doit alors recourir à son intuition, à son sens de l'observation, à son habileté manuelle et à sa capacité d'écouter et de s'exprimer, ce qui favorise l'acquisition de concepts et de processus ainsi que le développement de compétences.

Pour susciter l'engagement de l'élève, l'enseignant doit créer un climat qui permet à l'élève de prendre sa place à l'intérieur de la classe, sa communauté d'apprentissage. Il lui propose diverses activités et varie ses approches pédagogiques. Il compose avec les besoins, les champs d'intérêt et les acquis de chacun des élèves afin de les accompagner dans le développement de leur culture mathématique.

Il importe aussi de placer l'élève dans des situations qui exigent des justifications ou des réponses à des questions telles que « Pourquoi? », « Est-ce toujours vrai? » ou encore « Qu'arrive-t-il lorsque...? », et ce, dans tous les champs de la mathématique. Ce questionnement l'incite à raisonner, à s'approprier des savoirs mathématiques, à interagir et à expliquer sa démarche. Il est ainsi encouragé à réfléchir dans et sur l'action, et à faire face à la nouveauté.

Les situations-problèmes sont organisées autour d'obstacles à franchir, à propos desquels l'élève formule des conjectures[1]. En tant que modalité pédagogique, la résolution de situations-problèmes doit être privilégiée en raison de la richesse et de la diversité des apprentissages qu'elle favorise. Elle s'applique aux différents champs mathématiques et fait appel à la créativité comme aux habiletés intellectuelles. Elle est également propice au développement d'une pratique réflexive. Le recours régulier au processus de résolution de situations-problèmes permet à l'élève :

– d'explorer, d'inventer, de construire, d'élargir, d'approfondir, d'appliquer et d'intégrer des concepts et des processus mathématiques;
– d'acquérir les habiletés intellectuelles nécessaires au développement de la pensée et de la démarche mathématiques;
– de prendre conscience de ses capacités et d'adopter une attitude de respect à l'égard du point de vue des autres;
– de faire l'apprentissage de stratégies efficaces.

Les activités d'exploration sont des expériences riches parce qu'elles permettent à l'élève de conjecturer, de simuler, d'expérimenter, d'argumenter, de construire ses savoirs et de tirer des conclusions. Par exemple, l'analyse de différents aspects des positions relatives de trois droites dans un même plan offre à l'élève l'occasion de dégager plusieurs propriétés à partir desquelles il pourra valider d'autres conjectures ou résoudre certaines situations-problèmes.

Activités de longue durée favorisant l'établissement de liens avec les autres disciplines, les projets sont aussi de bons outils pédagogiques. Il en est de même pour les activités ludiques, qui suscitent généralement l'intérêt des élèves tout en contribuant à un large éventail d'apprentissages. Enfin, différentes situations de communication, telles que les présentations, les discussions et les débats, sont propices au développement des trois compétences visées par le programme.

Toutes ces activités peuvent être réalisées individuellement ou en équipe, en classe ou à la maison, et ce, en fonction des objectifs de développement visés et des approches pédagogiques utilisées. Leur objet renvoie à des situations pratiques plus ou moins familières, réelles ou fictives, réalistes ou fantaisistes, ou encore purement mathématiques. Elles sont inspirées des autres disciplines, de l'environnement de l'élève, des domaines généraux de formation ou du contexte historique dans lequel a évolué la mathématique. Suivant les objectifs poursuivis, elles comportent des données complètes, superflues, implicites ou manquantes. De plus, elles peuvent conduire à un ou plusieurs résultats ou, au contraire, ne mener nulle part.

1. Dans le présent programme, le terme *conjecture* désigne un énoncé que l'on pense vrai. Le verbe *conjecturer* signifie « pressentir la vérité d'un énoncé et chercher à montrer qu'il est vrai ».

Un matériel adéquat et diversifié

Pour exercer ses compétences, l'élève exploite, selon l'activité visée, diverses ressources matérielles, notamment du matériel de manipulation et des outils tels que des blocs géométriques, des objets, du papier quadrillé, des instruments de géométrie, une calculatrice et des logiciels. Il consulte, au besoin, différentes sources d'information à la bibliothèque ou sur Internet. Il fait également appel à des ressources humaines, particulièrement celles de son milieu scolaire ou de sa communauté.

La technologie, qui influe sur la mathématique et sur son utilisation, ne saurait se substituer aux activités intellectuelles. Elle demeure cependant d'une grande utilité. Elle permet notamment à l'élève de faire des apprentissages en mathématique, d'explorer des situations plus complexes, de manipuler un grand nombre de données, d'utiliser une diversité de modes de représentation, de simuler et de faciliter des calculs fastidieux. Il peut ainsi se consacrer à des activités signifiantes, développer ses aptitudes en calcul mental et approfondir le sens des concepts et des processus mathématiques. Les logiciels de géométrie dynamique constituent une bonne illustration de l'apport de la technologie. Ces logiciels permettent à l'élève de manipuler plus facilement certaines figures, d'explorer différentes situations, de découvrir certaines propriétés des figures ou encore d'en construire à partir de leurs définitions et de leurs propriétés et, ainsi, de consolider ses savoirs géométriques.

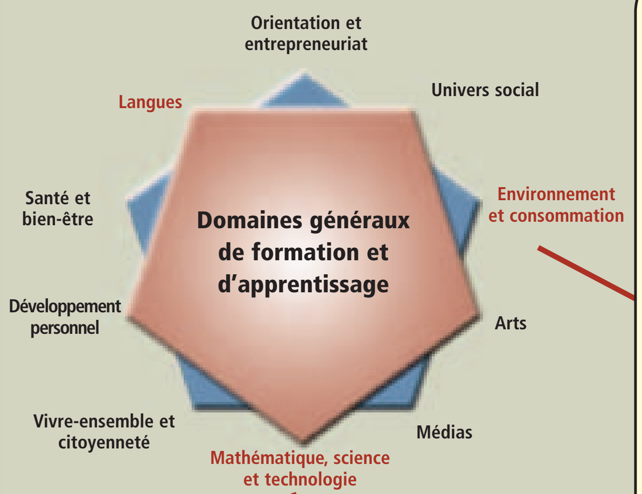
Si les différents modes de représentation, qui se trouvent dans tous les champs de la mathématique, sont primordiaux pour l'appropriation des concepts, le passage d'un mode à un autre facilite la compréhension des situations auxquelles l'élève doit faire face. Il bénéficiera, par exemple, de l'analyse de situations comportant des régularités ou des propriétés présentées sous différents modes : expressions verbales, dessins, tables de valeurs, graphiques ou expressions symboliques. Toutefois, certains passages ne sont pas abordés au premier cycle du secondaire et d'autres ne le sont qu'occasionnellement. Par exemple, on n'insiste pas sur la recherche d'une règle à partir d'un graphique, ou vice versa.

Une évaluation appropriée

Pour être conforme à l'orientation du programme, l'évaluation, considérée comme une aide à l'apprentissage, doit porter sur le degré de développement des compétences mathématiques prises dans leur globalité. Elle fournit à l'élève des renseignements utiles sur l'état de ses apprentissages, notamment sur son niveau de maîtrise des processus et du langage propres à la discipline de même que des concepts et de leurs réseaux. Quant à l'évaluation du contenu de formation, elle demeure importante, la connaissance des préalables notionnels étant indispensable à l'élargissement des réseaux de concepts et au raffinement des processus dans le développement des compétences. Il importe cependant de créer des situations permettant d'obtenir un portrait fiable de l'évolution de l'élève sur le plan de l'exercice des compétences, qui suppose une mobilisation adéquate d'éléments du contenu de formation. Divers moyens peuvent être utilisés en tenant compte des activités d'apprentissage dans lesquelles l'élève est engagé : l'autoévaluation, l'entrevue, l'examen objectif, la grille d'observation, le journal de bord, le portfolio, la présentation orale ou écrite d'une recherche ou d'une solution, etc.

Le schéma ci-après présente un exemple de situation d'apprentissage et illustre les liens possibles avec les éléments constitutifs du Programme de formation.

PORTRAIT D'UNE SITUATION MOBILISANT DES ÉLÉMENTS DU PROGRAMME DE FORMATION



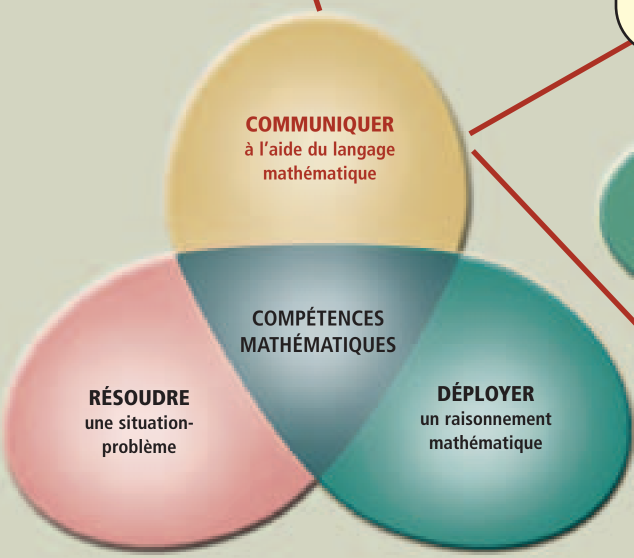
Situation d'apprentissage

Lors d'un questionnement sur l'environnement, qui porte notamment sur le degré de sensibilisation d'une population à l'égard du recyclage, une des questions retenues concerne les quantités de déchets produits et recyclés. Par cette activité, les élèves devront mettre à profit leur aptitude à communiquer à l'aide du langage mathématique.

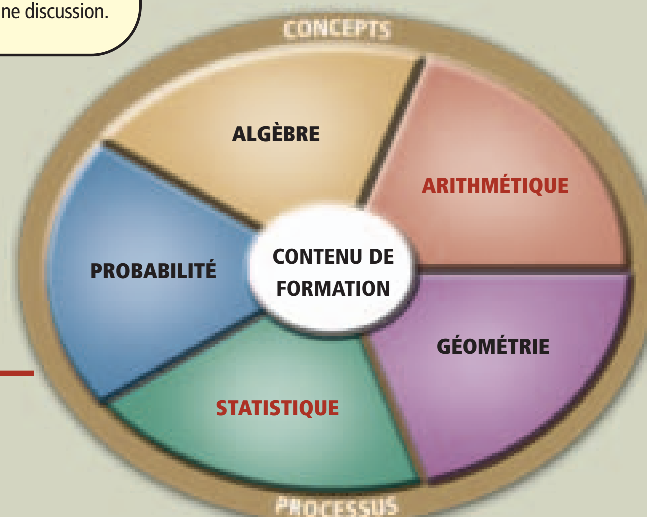
En se documentant sur le sujet, l'élève mobilise et enrichit ses réseaux de concepts et de processus. Il est amené à analyser différentes sources d'information ou à consulter des personnes-ressources dans sa communauté. Il se réfère à des documents électroniques, à des journaux ou à des livres qui contiennent des informations livrées sous différentes formes : textes, données numériques, pourcentages, tableaux, graphiques, etc.

Il interprète ces données en exploitant son sens du nombre et de la proportionnalité. Il établit un plan de communication dans lequel il utilise, au besoin, différents modes de représentation tels que des tableaux ou des graphiques pour mieux les visualiser et en dégager d'autres informations. Cela peut l'amener à établir des comparaisons.

À la suite de son analyse, il produit un message en tenant compte des règles et des conventions des langages courant et mathématique. Selon qu'il présente sa recherche oralement ou par écrit, il choisit le ou les moyens de communication les plus appropriés : rapport écrit, affiche, projection, diaporama ou présentation suivie d'une discussion.



AUTRES RESSOURCES
Journaux, télévision, vidéos, références, personnes-ressources, matériel pour une présentation, TIC, logiciels, Internet, repères culturels



EN ROUGE : Éléments du Programme de formation susceptibles de présenter des liens avec la situation d'apprentissage.

COMPÉTENCE 1 Résoudre une situation-problème

Une grande découverte résout un grand problème, mais il existe un brin de découverte dans la solution de tous les problèmes. Peu importe que le problème soit modeste, s'il pique votre curiosité et fait intervenir vos facultés d'invention et si vous le réglez par vos propres moyens, il se peut que vous ressentiez la tension et le triomphe de la découverte.

George Polya

Sens de la compétence

Résoudre une situation-problème, c'est adopter une démarche heuristique ou « de découverte ». En mathématique, cette compétence permet d'apporter une solution cohérente à une situation-problème qui répond à l'une des conditions suivantes :

– la situation n'a pas été présentée antérieurement en cours d'apprentissage;
– l'obtention d'une solution satisfaisante exige le recours à une combinaison non apprise de règles ou de principes dont l'élève a ou non fait l'apprentissage;
– le produit, ou sa forme attendue, n'a pas été présenté antérieurement.

La résolution d'une situation-problème implique du discernement, une recherche et la mise en place de stratégies[2] mobilisant des savoirs. Aussi l'exercice de cette compétence amène-t-il l'élève à effectuer une suite d'actions telles que décoder les éléments qui se prêtent à un traitement mathématique, représenter la situation-problème par un modèle mathématique, élaborer une solution mathématique, valider cette solution et partager l'information relative à la situation-problème et à la solution proposée. Il s'agit d'un processus dynamique qui comprend l'anticipation, le retour en arrière et le jugement critique.

L'habileté à résoudre une situation-problème constitue un outil intellectuel efficace pour poursuivre et approfondir le développement d'autres habiletés intellectuelles qui font appel à la fois au raisonnement et à l'intuition créatrice. Cette compétence permet également d'exercer et de développer les deux autres compétences du programme : *Déployer un raisonnement mathématique* et *Communiquer à l'aide du langage mathématique*.

Au primaire, l'élève a décodé des situations-problèmes dans lesquelles des données étaient manquantes ou qui exigeaient une démarche de résolution à plusieurs étapes. Il a fait appel à divers modes de représentation et à des stratégies, qu'il a développées pour élaborer une solution. Il a appris à valider sa solution et à la communiquer à l'aide du langage mathématique.

Au premier cycle du secondaire, l'élève poursuit le développement de cette compétence. Les situations-problèmes auxquelles il doit faire face se complexifient tout en faisant généralement appel à plusieurs champs de la mathématique, selon leur spécificité. Voici quelques illustrations de la contribution de chacun des champs au développement de la compétence.

- En arithmétique, l'élève exploite le sens du nombre et des opérations ainsi que les relations entre ces dernières. Il manipule des expressions numériques en utilisant différents ensembles de nombres à l'aide de processus associés au calcul mental ou écrit, ou encore à l'aide de la technologie. Il valide et interprète les résultats numériques obtenus en fonction du contexte.
- En algèbre, il recourt à différents modes de représentation. Il construit des expressions algébriques, des tables et des graphiques pour généraliser, interpréter et résoudre la situation-problème. Il identifie l'inconnue et, à l'aide de la résolution d'équations, en découvre la ou les valeurs et les interprète selon le contexte.
- En probabilité, il utilise des diagrammes, des grilles et des réseaux afin d'illustrer la situation, le cas échéant, et de faciliter le dénombrement dans des situations combinatoires simples. Il détermine l'univers des possibles associé à une expérience aléatoire et calcule la probabilité d'un événement, qu'il peut interpréter selon le contexte et à l'égard duquel il peut prendre une décision, s'il y a lieu.
- En statistique, il sélectionne des tableaux et des diagrammes appropriés afin d'organiser et d'analyser les données d'un relevé statistique qu'il a produit ou des données de seconde main dont il connaît la source et le contexte. Il recourt, au besoin, à des outils technologiques. S'il recueille lui-même les données, il le fait à partir d'un questionnaire qu'il a élaboré et, s'il y a lieu, utilise différentes mesures. Dans tous les cas, il choisit un échantillon représentatif.
- En géométrie, il passe de l'observation au raisonnement. Il énonce et mobilise des propriétés, des définitions et des relations pour analyser et résoudre une situation-problème. Il construit des figures au besoin, à l'aide d'instruments ou de logiciels de géométrie dynamique, et il manipule des expressions numériques ou algébriques, en particulier pour le calcul de longueurs et d'aires. L'élève interprète et écrit les résultats numériques obtenus en utilisant les unités de mesure appropriées à la situation.

2. Voir les exemples de stratégies à la page 262.

Compétence 1 et ses composantes

Décoder les éléments qui se prêtent à un traitement mathématique

Dégager l'information contenue dans divers modes de représentation : linguistique, numérique, symbolique, graphique • Déterminer les données manquantes, supplémentaires ou superflues, si nécessaire • Cerner et décrire la tâche à accomplir en ciblant la question posée ou en formulant une ou plusieurs questions

Représenter la situation-problème par un modèle mathématique

Associer à la situation-problème un modèle mathématique adéquat • Comparer, au besoin, la situation à des problèmes semblables résolus antérieurement • Reconnaître des similitudes entre des situations-problèmes différentes • Passer d'un mode de représentation à un autre et formuler des conjectures

Élaborer une solution mathématique

Utiliser des stratégies appropriées en s'appuyant sur des réseaux de concepts et de processus • Décrire le résultat attendu en tenant compte de la nature des données liées à la situation • Estimer, s'il y a lieu, l'ordre de grandeur du résultat • Organiser les données retenues • Confronter ces données avec celles de la situation et de la tâche à accomplir

Partager l'information relative à la solution

Expliciter sa solution, verbalement ou par écrit, d'une manière compréhensible et structurée • Tenir compte du contexte, des éléments du langage mathématique et du ou des destinataires

Valider la solution

Confronter le résultat obtenu avec le résultat attendu • Rectifier sa solution, au besoin • Apprécier la pertinence et l'efficacité des stratégies employées en comparant sa solution avec celle de ses pairs, de son enseignant ou d'autres sources • Justifier les étapes de sa démarche

- Manifestation, oralement ou par écrit, de sa compréhension de la situation-problème
- Mobilisation des savoirs mathématiques appropriés à la situation-problème
- Élaboration d'une solution (c'est-à-dire d'une démarche et d'un résultat) appropriée à la situation-problème

Attentes de fin de cycle

À la fin du premier cycle du secondaire, l'élève est en mesure de résoudre des situations-problèmes touchant un ou plusieurs champs de la mathématique et comportant des données multiples. Il fait appel avec justesse aux divers modes de représentation en les diversifiant d'une situation à l'autre, selon le contexte. Il utilise correctement les réseaux de concepts et de processus mathématiques visés. Il élabore une solution (une démarche et un résultat) en mettant en œuvre différentes stratégies, la valide et la communique en utilisant de façon rigoureuse les langages courant et mathématique.

La résolution d'une situation-problème nécessite la mobilisation de concepts et de processus propres à chaque champ mathématique.

- En arithmétique, l'élève choisit des opérations ainsi que les processus nécessaires pour les effectuer, en tenant compte des propriétés et des priorités de ces opérations; il interprète, selon le contexte, divers types de nombres utilisés.
- En algèbre, il généralise une situation à l'aide d'une expression algébrique et, s'il s'agit d'une équation, détermine et interprète l'inconnue, selon le contexte.
- En probabilité, il effectue des activités de dénombrement et calcule des probabilités. Il les interprète et prend des décisions, s'il y a lieu.
- En statistique, il élabore un questionnaire, au besoin, et il organise, présente et analyse des données provenant d'un sondage.
- En géométrie, il construit des figures, identifie des propriétés ainsi que des relations entre les propriétés des figures et utilise des définitions. Pour le calcul de longueurs et d'aires, il émet un raisonnement sur les formules en manipulant des expressions numériques ou algébriques et interprète les résultats obtenus.

COMPÉTENCE 2 Déployer un raisonnement mathématique

Nous entendons souvent dire que les mathématiques consistent à « prouver des théorèmes ». Le travail d'un écrivain serait-il « d'écrire des phrases »? L'œuvre d'un mathématicien est surtout un enchevêtrement de conjectures, d'analogies, de souhaits et de frustrations; la démonstration, loin d'être le noyau de la découverte, n'est souvent que le moyen de s'assurer que notre esprit ne nous joue pas des tours.

Gian-Carlo Rota

Sens de la compétence

Déployer un raisonnement mathématique consiste à formuler des conjectures, à critiquer, à justifier ou à infirmer une proposition en faisant appel à un ensemble organisé de savoirs mathématiques. Cette compétence, essentielle aux activités mathématiques, suppose une disposition de l'esprit qui se traduit par une manière particulière d'aborder une situation. Lorsqu'il déploie un raisonnement mathématique, l'élève oriente son action et structure sa pensée. Il a recours à des règles d'inférence et de déduction et construit un ensemble fonctionnel de savoirs.

Raisonnement mathématique et langage, oral ou écrit, sont indissociables. Le langage, qui englobe ici la langue naturelle, les systèmes de représentation, le lexique et la symbolique mathématiques, est à la fois l'outil et l'objet du raisonnement. Il est également son véhicule puisqu'il permet la manifestation du résultat et obéit à des critères logiques[3] ou dialogiques[4]. Selon qu'il s'agit de se convaincre, de convaincre un autre élève ou une personne étrangère au contexte de production ou encore de valider une solution en pratique ou en théorie, le raisonnement sera plus ou moins approfondi et se traduira par des modes de communication variables. Aussi l'exercice de cette compétence amène-t-il l'élève à former et à appliquer des réseaux de concepts et de processus mathématiques, à émettre des conjectures et à les valider.

Le raisonnement joue un rôle fondamental dans le développement intellectuel, notamment dans l'analyse et le traitement de diverses situations. Il permet de formuler une conjecture et de modifier sa valeur si les données du contexte ou les connaissances de l'apprenant ont changé. Lorsque certaines conditions particulières sont remplies (preuve, démonstration), le raisonnement peut amener une personne à modifier la valeur de vérité de la conjecture. Par ailleurs, le recours à des supports visuels tirés des systèmes de représentation utilisés en mathématique (diagrammes, figures, graphiques, schémas, etc.) peut donner lieu à un raisonnement plus intuitif, mais non moins rigoureux. Le raisonnement demeure toutefois subordonné, notamment lorsqu'il repose sur des cas de figure, à une démarche plus structurée dans laquelle la symbolique mathématique et les règles de démonstration sont mises à contribution.

Le développement de cette compétence nécessite également le recours à des capacités qui sont indispensables à l'apprentissage de la mathématique, comme savoir s'exprimer et argumenter correctement, interpréter dans des termes mathématiques une situation de la vie quotidienne, gérer des situations complexes, travailler en groupe dans un projet de recherche ou encore consulter des ouvrages ou des manuels scolaires de façon autonome.

Déjà au primaire, l'élève s'est engagé dans le développement de cette compétence. Il a appris à construire des réseaux de concepts et de processus mathématiques en observant diverses régularités, en établissant des liens entre des nombres et des opérations, en dégageant des relations géométriques, en explorant des activités liées au hasard et en interprétant des données statistiques. Il est en mesure de mobiliser ces réseaux pour les appliquer aux situations qui lui sont soumises et de s'en servir dans le but de justifier des actions et des énoncés.

Au premier cycle du secondaire, la construction et l'utilisation par l'élève de réseaux de concepts et de processus se poursuivent et s'approfondissent tout en faisant appel à des éléments du contenu de formation propre à chaque champ de la discipline. Voici quelques illustrations de la contribution de chacun des champs au développement de la compétence.

- En arithmétique, l'élève recourt à son sens du nombre et des opérations lorsqu'il utilise les nombres écrits en notation décimale ou fractionnaire pour comparer, estimer, calculer mentalement ou par écrit et respecter

3. Par exemple, si $a \times b = 0$, alors, selon la propriété du produit nul, $a = 0$ ou $b = 0$.
4. Par exemple, l'argumentation.

l'ordre de priorités des opérations. Il estime l'ordre de grandeur d'un résultat, convertit les écritures décimale et fractionnaire et applique les critères de divisibilité. Il traduit des situations sur un axe de nombres ou dans un plan cartésien.

De plus, il déploie un raisonnement proportionnel lorsqu'il observe qu'une quantité ou une grandeur est liée à une autre par un rapport déterminé. Il fait usage de ce type de raisonnement pour calculer un quotient, un taux (pente, vitesse, débit, etc.) ou un indice, pour effectuer des opérations sur des suites de nombres ou en comparer des éléments, pour convertir des unités ou pour appliquer un pourcentage à une valeur. Il fait aussi intervenir le raisonnement proportionnel dans la construction et l'interprétation de tableaux et lorsqu'il travaille à la représentation en statistique, à l'analyse de données statistiques ou probabilistes et aux rapports de similitude en géométrie.

- En algèbre, l'élève s'initie au sens de l'expression algébrique par des manipulations telles que la réduction ou le développement d'expressions algébriques, la résolution d'équations à une inconnue et la modélisation de situations par une traduction en écriture algébrique. Il exploite certains procédés algébriques pour démontrer la véracité d'une conjecture, résoudre des équations ou appliquer des formules. Il interprète des expressions algébriques et les associe aux divers modes de représentation, ce qui lui permet de coordonner les éléments du langage.

- En probabilité, l'élève intègre l'idée d'incertitude dans ses raisonnements en considérant l'ensemble des possibilités et en incluant le hasard comme paramètre. Il s'interroge sur les relations entre deux événements simples : indépendance, équiprobabilité, complémentarité, incompatibilité. En s'appuyant sur différents diagrammes, il dégage des règles de combinatoire[5] et établit des liens à l'aide du sens et des propriétés des opérations arithmétiques. Il peut vérifier ses conjectures par l'expérimentation, la simulation et l'analyse statistique des données recueillies.

- En statistique, il prépare des collectes de données, réalise des sondages et émet un raisonnement sur les données recueillies. Il différencie le caractère qualitatif du caractère quantitatif des données. Il mène différents types de raisonnements pour élaborer un questionnaire et traiter les données recueillies. Cela implique l'organisation de ces données, le choix du moyen le plus approprié pour les représenter, leur interprétation et la formulation de conclusions. Il exerce enfin son jugement critique au moment d'évaluer l'adéquation du traitement quantitatif et graphique des données.

- En géométrie, il déploie un raisonnement lorsqu'il apprend à reconnaître les caractéristiques des figures usuelles, met en évidence leurs propriétés et effectue des opérations sur les figures planes à l'aide de transformations géométriques. Il compare et calcule des angles, des longueurs et des aires, et il forme des patrons (développements) de solides qu'il représente par un dessin. Il se familiarise avec les définitions et les propriétés des figures qu'il utilise pour résoudre des problèmes à l'aide de déductions simples. Il détermine des mesures manquantes dans différents contextes.

L'élève évolue entre différents types de raisonnements, notamment l'analogie, l'induction et la déduction, en mobilisant les raisonnements particuliers à chaque champ mathématique. Pour l'amener à développer son raisonnement déductif, il convient de l'initier à certaines règles de base de la logique mathématique telles que :

– un énoncé mathématique est soit vrai, soit faux;
– un contre-exemple suffit pour démontrer qu'une conjecture est fausse;
– le fait que plusieurs exemples permettent de vérifier un énoncé mathématique ne suffit pas à prouver qu'il est vrai;
– une constatation ou des mesures à partir d'un dessin ne prouvent pas qu'une conjecture est vraie mais peuvent toutefois servir à en formuler une.

Les situations d'application auxquelles on fait appel pour l'évaluation de cette compétence nécessitent le recours à une combinaison connue de concepts et de processus appris antérieurement ainsi qu'à certaines aptitudes développées par l'élève. Ces situations peuvent être simples ou complexes. Dans une situation simple, l'évaluation porte sur la maîtrise d'un réseau de concepts et de processus mobilisés. Dans une situation complexe, elle porte sur la maîtrise de plusieurs réseaux.

5. Par *combinatoire*, on entend des procédés de dénombrement.

Compétence 2 et ses composantes

Former et appliquer des réseaux de concepts et de processus mathématiques

Établir des liens structurés et fonctionnels entre des concepts et des processus • Dégager des lois, des règles et des propriétés • Mettre en relation différents réseaux de concepts et de processus • Recourir à différents modes de représentation • Coordonner les éléments du langage mathématique relatifs à ces réseaux

Établir des conjectures

Analyser les conditions d'une situation • Organiser des jugements mathématiques • Former une opinion probable ou vraisemblable • S'approprier ou énoncer des conjectures adaptées à la situation • Apprécier la pertinence des conjectures retenues

Réaliser des démonstrations ou des preuves

Choisir un mode de représentation • Utiliser les moyens propres au mode retenu • Recourir, au besoin, à des contre-exemples pour préciser, réajuster ou réfuter des conjectures • Mettre en forme les résultats de sa démarche • Reprendre l'exercice, au besoin

– Formulation d'une conjecture appropriée à la situation[6]
– Utilisation correcte des concepts et des processus appropriés à la situation[7]
– Mise en œuvre convenable d'un raisonnement mathématique[8] adapté à la situation
– Structuration adéquate des étapes d'une démarche pertinente
– Justification congruente des étapes d'une démarche pertinente

6. La situation à laquelle on fait allusion est décrite au dernier paragraphe de la page 243.

7. *Idem*.

8. Par *raisonnement mathématique*, on entend un raisonnement par analogie, par induction, par déduction et un raisonnement proportionnel, algébrique, géométrique, arithmétique, probabiliste ou statistique.

Attentes de fin de cycle

À la fin du premier cycle du secondaire, l'élève est en mesure de faire appel aux différents modes de pensée mathématique afin de cerner une situation et d'émettre des conjectures. Il met à profit les concepts et les processus appropriés à la situation et expérimente différentes pistes pour confirmer ou réfuter ses conjectures. Il les valide soit en appuyant chaque étape de sa solution sur des concepts, des processus, des règles ou des énoncés, qu'il exprime de façon structurée, soit en fournissant des contre-exemples.

Le déploiement d'un raisonnement mathématique nécessite, entre autres, la mobilisation de concepts et de processus propres à chaque champ mathématique.

- En arithmétique, l'élève sollicite son sens du nombre et des opérations et utilise l'équivalence de nombres ou d'expressions numériques. Il effectue des opérations sur les nombres et a recours aux concepts de rapport, de taux, de proportion ainsi qu'aux stratégies multiplicatives, entre autres lorsqu'il s'agit de conjectures portant sur des situations de proportionnalité.
- En algèbre, il interprète, construit et manipule des expressions algébriques.
- En probabilité, il exploite les concepts de dénombrement et d'événement afin de calculer des probabilités.
- En statistique, il traite des données, c'est-à-dire qu'il organise, représente et analyse un ou plusieurs éléments d'un sondage.
- En géométrie, il procède par des déductions simples à partir de définitions et de propriétés, par exemple pour déterminer la valeur de mesures manquantes.

COMPÉTENCE 3 Communiquer à l'aide du langage mathématique

L'avantage d'un langage bien construit est tel que sa notation simplifiée devient souvent la source de profondes théories.

Pierre-Simon de Laplace

Sens de la compétence

Communiquer à l'aide du langage mathématique, c'est interpréter et produire des messages en combinant le langage courant et des éléments spécifiques du langage mathématique : termes, symboles et notations. L'utilisation d'outils de communication obtenus par le recours à la mathématique permet, dans certains contextes, d'être plus précis. Outre l'attention portée aux qualités habituellement recherchées dans des messages, telles la clarté et la concision, le développement de cette compétence vise à susciter chez l'élève une sensibilité à l'égard de la précision et de la rigueur.

Le fait de produire ou d'interpréter un message oral ou écrit, portant sur un questionnement, une explication ou un énoncé issus d'activités mathématiques, oblige l'élève à clarifier sa pensée et lui offre l'occasion d'apprendre des concepts et des processus mathématiques ou encore de renforcer ses apprentissages. L'exercice de cette compétence l'amène aussi à analyser une situation de communication à caractère mathématique de même qu'à produire, à interpréter ou à transmettre des messages à caractère mathématique.

La communication est utile pour tous ceux qui participent aux discussions, ne serait-ce qu'en raison de l'enrichissement mutuel qui résulte de l'échange d'information. Mais elle est doublement avantageuse pour l'émetteur. L'obligation de faire part à son interlocuteur de sa compréhension d'une situation ou d'un concept mathématique lui permet en effet d'améliorer et d'approfondir cette compréhension.

À l'exercice de cette compétence s'ajoute l'appropriation des éléments du langage propre à la discipline, dont plusieurs sont abstraits. Par exemple, le cercle ou l'équation ne se retrouvent pas comme tels dans la nature. En outre, l'élève doit se familiariser avec les éléments du langage que sont les termes, les symboles et les notations et apprendre à choisir des modes de représentation adaptés aux situations numériques, symboliques, graphiques ou linguistiques. Il doit pouvoir recourir à ces divers modes de représentation et passer avec aisance de l'un à l'autre. Étant donné que plusieurs définitions de termes se précisent à mesure que progressent les apprentissages, il importe de leur accorder une attention particulière. Par exemple, la définition du carré que l'on utilise au premier cycle du primaire est, en principe, moins riche et précise que celle à laquelle se réfèrent les élèves du premier cycle du secondaire.

Au primaire, l'élève a interprété et produit des messages, oraux ou écrits, en faisant appel à plusieurs modes de représentation. Il a raffiné ses choix de termes et de symboles mathématiques. Il a comparé des informations provenant de plusieurs sources. Lors d'échanges avec ses pairs, il a analysé des points de vue et réajusté son message au besoin.

Au premier cycle du secondaire, les éléments du langage mathématique qui entrent en jeu dans le développement et l'exercice de cette compétence sont liés aux éléments du contenu de formation de chacun des champs de la mathématique. Voici quelques illustrations de la contribution de chacun des champs au développement de la compétence.

- En arithmétique et en algèbre, l'élève communique lorsqu'il produit ou interprète des expressions symboliques qui servent à généraliser et à modéliser des relations entre les nombres.
- En probabilité et en statistique, il communique lors du dénombrement, de l'organisation, de l'analyse et de l'interprétation de données.
- En géométrie, il communique lorsqu'il décrit et interprète une figure afin, notamment, de la reproduire. Lors de la recherche de mesures manquantes, il utilise des unités de mesure et peut produire ou interpréter des formules.

Dans tous les cas, la communication est nécessaire lorsque l'élève formule des conjectures à partir des réseaux de concepts et de processus mathématiques, puisqu'il lui faut présenter ses arguments et ses choix et justifier sa solution.

Cette compétence est étroitement liée à la conceptualisation et à l'explicitation des connaissances, des processus et des démarches à la base d'un raisonnement mathématique ou de la résolution d'une situation-problème. Elle se développe donc également par l'exercice des deux autres compétences de la discipline.

Compétence 3 et ses composantes

Analyser une situation de communication à caractère mathématique

Reconnaître l'objet du message • Distinguer le sens des termes utilisés dans la vie courante de leur sens en mathématique • Consulter, au besoin, différentes sources d'information • Organiser ses idées et établir un plan de communication

Interpréter ou transmettre des messages à caractère mathématique

Exprimer ses idées au moyen du langage mathématique en tenant compte des règles et des conventions qui s'y rattachent ainsi que du contexte • Valider un message pour en améliorer la compréhension, s'il y a lieu • Résumer des informations • Discuter à partir de messages à caractère mathématique

Produire un message à caractère mathématique

Choisir, selon le contexte, les éléments du langage mathématique appropriés au message • Associer, selon le contexte, des images, des objets ou des concepts à des termes et à des symboles mathématiques • Sélectionner des modes de représentation selon l'objet du message et l'interlocuteur

– Interprétation juste d'un message comportant au moins un mode de représentation mathématique adapté à la situation
– Production d'un message qui est conforme à la terminologie, aux règles et aux conventions propres à la mathématique et qui tient compte du contexte

Attentes de fin de cycle

À la fin du premier cycle du secondaire, et ce, dans tous les champs de la mathématique, l'élève est en mesure d'interpréter ou de produire des messages oraux ou écrits. Il utilise le langage mathématique et le langage courant appropriés en faisant appel à divers modes de représentation adaptés. Les messages sont cohérents et sans ambiguïté selon la situation et l'interlocuteur; il peut les expliciter si nécessaire.

Chaque champ de la mathématique nécessite la mobilisation de concepts et de processus différents.

- En arithmétique et en algèbre, l'élève fait appel à des expressions symboliques découlant de la modélisation ou de la généralisation des relations entre les nombres.
- En probabilité et en statistique, il explique les procédés de dénombrement qu'il utilise et il organise, représente et interprète des données.
- En géométrie, il décrit et interprète des figures géométriques. Lorsqu'il recherche la valeur des mesures manquantes, il produit et interprète des formules.

Contenu de formation

Il fut un temps où toutes les parties de cette matière étaient dissociées, quand l'algèbre, la géométrie et l'arithmétique vivaient séparément ou entretenaient de froides relations limitées à se réclamer occasionnellement l'une de l'autre, mais ce temps est maintenant terminé; elles se sont rassemblées et deviennent de plus en plus intimement unies par mille nouveaux liens; nous pouvons envisager avec confiance le moment où elles ne formeront qu'un seul corps et qu'une seule âme.

James Joseph Sylvester

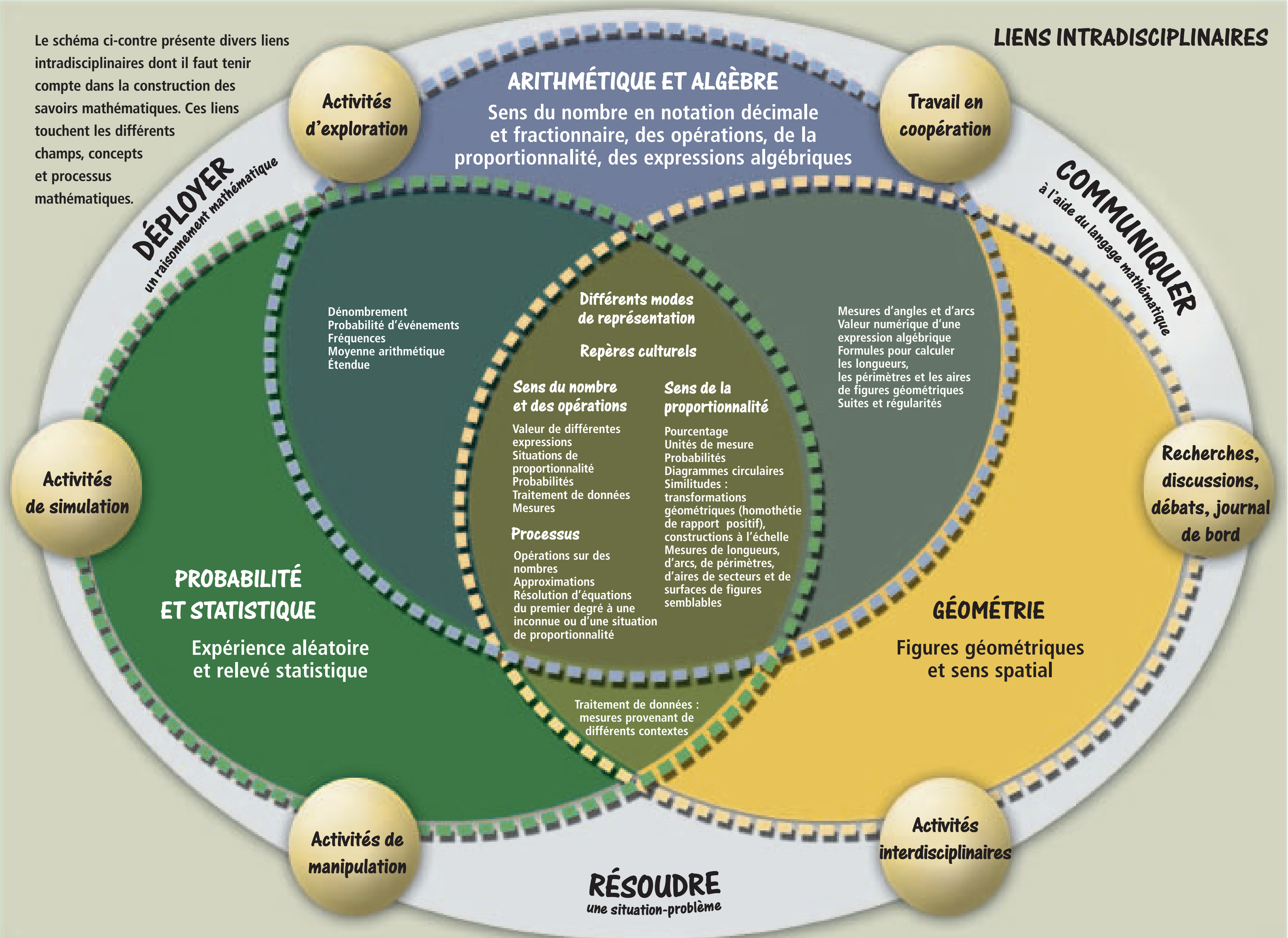
Il existe un lien étroit entre les compétences et les éléments du contenu disciplinaire. En effet, l'aptitude à transférer concepts et processus dans des situations-problèmes ou des situations d'application témoigne de la maîtrise qu'en a l'élève. La préoccupation à l'égard de cette aptitude joue donc un rôle déterminant dans le développement des compétences *Résoudre une situation-problème* et *Déployer un raisonnement mathématique*. Par ailleurs, la compétence *Communiquer à l'aide du langage mathématique*, parce qu'elle est à la fois dépendante et porteuse de la terminologie et du symbolisme propres aux concepts mathématiques, est indissociable de leur apprentissage.

Sont ici présentés des concepts et des processus mathématiques, des éléments de méthode ainsi que des repères culturels liés à l'arithmétique, à l'algèbre, à la probabilité, à la statistique ainsi qu'à la géométrie. La section se termine par quelques exemples de stratégies associées à la résolution de situations-problèmes. Puisque l'objectif premier du Programme de formation est le développement de compétences, la plupart des concepts et des processus doivent êtres construits par l'élève et réinvestis dans des contextes diversifiés. Le contenu de formation peut être perçu, d'une part, dans sa linéarité, car la construction de l'« édifice mathématique » fait constamment appel à des préalables, et, d'autre part, comme une source de liens entre les différents champs de la mathématique et avec les autres disciplines. Toutefois, l'interdépendance et l'enrichissement mutuel des champs de la mathématique, qui font, par exemple, que les propriétés des objets d'un champ contribuent à la compréhension de celles des objets d'un autre champ, impliquent qu'on en aborde les éléments de contenu de manière symbiotique. Quant au langage mathématique, il fait appel à des termes, à des notations, à des symboles et à différents modes de représentation qu'il importe de maîtriser pour assurer à la communication un caractère univoque.

Sous la rubrique *Repères culturels* sont présentées des suggestions d'actions qui visent à aider l'élève à situer les concepts mathématiques dans un contexte historique et social, à voir leur évolution et à cerner les problématiques qui ont suscité le développement de certains processus de même que les besoins que les concepts ont comblés. Ces repères devraient permettre à l'élève d'apprécier la place de la mathématique dans sa vie quotidienne et l'apport des mathématiciens au développement de cette discipline. Que ce soit notamment par le moyen de situations-problèmes, de capsules historiques, de recherches, d'activités interdisciplinaires ou d'un journal, il importe d'élaborer des situations d'apprentissage qui amènent l'élève à découvrir les différents rôles joués par la mathématique et des éléments de son histoire. Il pourra ainsi établir des liens avec les autres domaines et porter un regard éclairé, esthétique ou critique sur le monde.

LIENS INTRADISCIPLINAIRES

Le schéma ci-contre présente divers liens intradisciplinaires dont il faut tenir compte dans la construction des savoirs mathématiques. Ces liens touchent les différents champs, concepts et processus mathématiques.



Arithmétique[9]

Le Nombre est un témoin intellectuel qui n'appartient qu'à l'homme…
Honoré de Balzac

Au primaire, l'élève a développé son sens du nombre et des opérations sur les nombres naturels, les fractions et les nombres décimaux. Il est en mesure de passer de la notation fractionnaire à la notation décimale ou au pourcentage. Il a dégagé les relations entre les opérations ainsi que leurs propriétés. Il sait respecter les priorités des opérations dans des chaînes d'opérations simples. Il a été initié au concept de nombre entier. Il est capable d'effectuer, mentalement ou par écrit, des opérations avec des nombres naturels et des nombres décimaux[10]. Finalement, il a effectué certaines opérations[11] sur les fractions à l'aide d'un matériel concret et de schémas.

Au premier cycle du secondaire, il construit et s'approprie les concepts et les processus suivants :

Concepts

Sens du nombre en notation décimale et fractionnaire et sens des opérations

– Lecture, écriture, représentations variées, régularités, propriétés
– Notations fractionnaire, décimale, exponentielle (exposant entier); pourcentage, racine carrée
– Caractères de divisibilité (par 2, 3, 4, 5, 10)
– Règles des signes pour les nombres écrits en notation décimale
– Relation d'égalité : sens, propriétés et règles de transformation (principe de la balance)
– Opérations inverses : addition et soustraction, multiplication et division, carré et racine carrée
– Propriétés des opérations :
  • Commutativité et associativité
  • Distributivité de la multiplication sur l'addition ou la soustraction et mise en évidence simple
– Priorité des opérations et utilisation d'au plus deux niveaux de parenthèses dans différents contextes

Processus

Différentes formes d'écriture et de représentation

– Appréciation de l'ordre de grandeur
– Comparaison
– Utilisation de représentations variées (numérique, graphique, etc.)
– Reconnaissance et production d'écritures équivalentes :
  • Décomposition (additive, multiplicative, etc.)
  • Fractions équivalentes
  • Simplification et réduction
– Passage d'une forme d'écriture à une autre, d'une représentation à une autre
– Transformation d'égalités arithmétiques
– Repérage de nombres sur la droite numérique, abscisse d'un point

Note
On utilise les nombres positifs ou négatifs, en notation décimale ou fractionnaire dans le repérage sur un axe et dans un plan cartésien. Le passage d'une forme d'écriture à une autre se fait à l'aide de nombres positifs.

9. La proportionnalité est traitée à la suite de l'arithmétique.
10. Il existe certaines restrictions relatives à l'ordre de grandeur des nombres naturels et décimaux. À cet égard, on peut se référer au Programme de formation de l'école québécoise du primaire.
11. Pour les additions et les soustractions de fractions, le dénominateur de l'une est un multiple de l'autre. On multiplie une fraction par un nombre naturel seulement. La multiplication et la division de fractions ne sont pas au programme du primaire.

Concepts (*Suite*)

Note

Le programme vise essentiellement l'étude des nombres rationnels positifs et négatifs, écrits en notation décimale ou fractionnaire. L'étude systématique des ensembles de nombres n'est pas retenue pour le premier cycle, mais l'utilisation des termes justes qui ont été employés au primaire est toujours à privilégier (nombres naturels, entiers, décimaux).

Le sens des nombres, des opérations et de l'égalité doit être au cœur des apprentissages.

Selon le contexte ou les besoins, l'élève pourra aussi employer d'autres caractères de divisibilité tels que 6, 9, 12 ou 25.

La connaissance des propriétés des opérations permet d'envisager des écritures équivalentes qui simplifient les calculs et peut libérer d'une dépendance à l'égard de la calculatrice.

La connaissance des priorités des opérations permet de comprendre et d'apprécier l'efficacité de la technologie.

Processus (*Suite*)

Opérations sur des nombres en notation décimale et fractionnaire

- Estimation et arrondissement dans différents contextes
- Recherche d'expressions équivalentes
- Approximation du résultat d'une opération
- Simplification des termes d'une opération
- Calcul mental : les quatre opérations, particulièrement avec les nombres écrits en notation décimale en mettant à profit des écritures équivalentes et les propriétés des opérations
- Calcul écrit : les quatre opérations, avec des nombres facilement manipulables (y compris des grands nombres) et des chaînes d'opérations simples en respectant leur priorité (nombres écrits en notation décimale) et en mettant à profit des écritures équivalentes et les propriétés des opérations

Exemples (pour le calcul mental ou écrit) :

$$15 \times 102 = 15(100 + 2) = 15 \times 100 + 15 \times 2 = 1\,500 + 30 = 1\,530$$

$$2\frac{1}{4} \times 3\frac{1}{2} = 2 \times 3 + 2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times 3 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = 6 + 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = 7\frac{7}{8}$$

$$3{,}5 \times 6 - 3{,}5 \times 4 = 3{,}5(6 - 4) = 7$$

- Utilisation d'une calculatrice : opérations et chaînes d'opérations en respectant leur priorité

Note

Dans les opérations, l'utilisation des nombres négatifs se limite aux nombres écrits en notation décimale.

L'élève utilise un outil technologique pour les opérations dans lesquelles les diviseurs ou les multiplicateurs ont plus de deux chiffres.

Pour le calcul écrit, la compréhension et la maîtrise des processus doivent primer plutôt que la complexité des calculs.

L'élève deviendra apte à utiliser la technologie au moment opportun.

Éléments de méthode

La mathématisation de situations, l'anticipation de résultats numériques d'opérations et l'interprétation de résultats selon le contexte contribuent au développement du sens du nombre et des opérations.

L'élève visualise, au besoin, les opérations à l'aide de matériel concret, tel que des bandes de papier et des tuiles algébriques, ou de matériel semi-concret, comme la droite numérique. Il donne du sens aux opérations sur les nombres lorsqu'il les utilise régulièrement sous différentes formes : mentalement, par écrit ou à l'aide d'une calculatrice. Le sens des opérations s'acquiert également dans des contextes variés. Par exemple, l'addition et la soustraction peuvent s'utiliser dans des situations de réunion, de comparaison ou de transformation. La multiplication peut servir dans les cas de comparaison, de combinaison ou d'arrangement rectangulaire et la division, dans des situations de partage ou de contenance.

Concepts	Processus
Sens de la proportionnalité – Rapport et taux • Rapports et taux équivalents • Taux unitaire – Proportion • Égalité de rapports et de taux • Rapport et coefficient de proportionnalité – Variation directe ou inverse	***Traitement d'une situation de proportionnalité*** – Comparaison de rapports et de taux – Reconnaissance d'une situation de proportionnalité, notamment à l'aide du contexte, d'une table de valeurs ou d'un graphique – Résolution d'une situation de proportionnalité – Repérage de couples de nombres dans le plan cartésien (abscisse et ordonnée d'un point)

Éléments de méthode

Le développement du raisonnement proportionnel est fondamental et ses applications sont nombreuses tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de la discipline. Par exemple, l'élève utilise les pourcentages (calcul du tant pour cent et du cent pour cent) dans des situations relatives à la consommation, à la probabilité et à la statistique. Dans le contexte des représentations graphiques, il effectue, entre autres, des constructions à l'échelle et construit également des diagrammes circulaires. Il recherche des valeurs manquantes dans des situations algébriques ou géométriques telles que les similitudes, les longueurs d'arcs, les aires de secteurs et les transformations d'unités.

Le sens de la proportionnalité peut se développer chez l'élève lorsqu'il interprète des rapports ou des taux dans des contextes variés ou lorsqu'il les compare qualitativement ou quantitativement (ex. *a* est plus foncé que *b*, *c* est moins concentré que *d*) et décrit l'effet d'une modification d'un terme, d'un rapport ou d'un taux. Lorsque l'élève est en mesure de reconnaître une situation de proportionnalité, il peut la traduire à l'aide d'une proportion. Il la résout en ayant recours notamment à des stratégies multiplicatives qu'il a élaborées, telles que le retour à l'unité, la recherche d'un facteur de changement, la recherche du rapport ou du coefficient de proportionnalité, le procédé additif ou mixte, etc. Un minimum de trois couples est nécessaire pour analyser une situation de proportionnalité à partir d'une table de valeurs.

Exemples :

Quantité du produit A	2	4	6	10
Quantité du produit B	6	12	18	?

Retour à l'unité : Pour 1 unité du produit A, on a 3 unités du produit B ($12 \div 4$);
pour 10 unités du produit A, on aura alors (10×3) unités du produit B.

Facteur de changement : Le facteur permettant le passage de 4 à 10 est 2,5; on applique ce facteur à 12.

Coefficient de proportionnalité : Le facteur permettant le passage de 4 à 12 est 3; on applique ce facteur à 10.

Procédé additif : Puisque 4:12 = 6:18, alors $\frac{4}{12} = \frac{6}{18} = \frac{4+6}{12+18} = \frac{10}{30}$

Algèbre

L'algèbre figure ici non pas comme une structure parmi d'autres mais comme l'instrument mathématique […] auquel on ramène l'étude des problèmes de toutes sortes…
Seymour Papert

Au primaire, par ses diverses activités mathématiques, l'élève a été initié, à son insu, à des préalables à l'algèbre. Mentionnons notamment la recherche de termes manquants par l'utilisation des propriétés des opérations et des relations entre elles, l'appropriation du sens des relations d'égalité et d'équivalence, l'utilisation des priorités des opérations et la recherche de régularités dans différents contextes.

Au premier cycle du secondaire, il construit et s'approprie les concepts et les processus suivants :

Concepts

Sens des expressions algébriques

– Expression algébrique
  • Variable
  • Coefficient
  • Degré
  • Terme, termes semblables
– Égalité, équation et inconnue
– Équation du premier degré à une inconnue se ramenant à la forme $ax + b = cx + d$

Processus

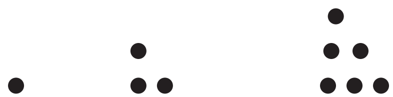
– Construction d'une expression algébrique
– Reconnaissance et recherche d'expressions algébriques équivalentes
– Évaluation numérique d'une expression algébrique
– Manipulation d'expressions algébriques
  • Addition et soustraction
  • Multiplication et division par une constante
  • Multiplication de monômes de degré 1
– Résolution d'équations du premier degré à une inconnue
  • Validation de la solution obtenue par substitution
– Représentation globale d'une situation par un graphique

Note
Les coefficients et les termes constants des expressions algébriques sont des nombres écrits en notation décimale ou fractionnaire. Le choix de la notation dépend de la situation. Par exemple, les nombres en notation fractionnaire ayant un développement décimal périodique (ex. $\frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \ldots$) et ceux permettant des simplifications ne devraient pas être transformés en notation décimale.

Éléments de méthode

Pour construire sa pensée algébrique, l'élève observe des régularités issues de situations diverses et représentées de différentes façons, comme des dessins, des tables de valeurs et des graphiques. Pour introduire les idées de variable, de dépendance entre des variables et de généralisation à l'aide d'une règle, l'utilisation de suites de nombres constitue un moyen privilégié. Par exemple, on peut utiliser les nombres polygonaux ou différentes situations géométriques pour généraliser à l'aide d'une ou de plusieurs règles équivalentes.

Exemples :

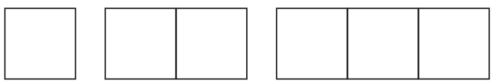


1 3 6

$$\frac{n \times (n+1)}{2}$$

L'expression correspond au nombre de points.

Note : Dans cet exemple, l'élève mobilise le concept d'aire et il n'a pas à développer cette expression.



$$1 + n \times 3$$

$$4 + (n-1) \times 3$$

$$n \times 4 - (n-1) \times 1$$

Les expressions correspondent au nombre de segments.

La traduction de l'énoncé d'un problème à l'aide d'une ou de plusieurs expressions algébriques ou équations est une action liée à la résolution de problèmes. L'élève doit être exposé à une très grande diversité de situations pour être habile à le faire. Inversement, le fait de produire un énoncé à partir d'une expression algébrique, ou un problème à partir d'une équation, lui permettra d'en saisir toutes les nuances. Pour faciliter sa compréhension, il peut également représenter une situation-problème à l'aide d'un dessin, d'une table de valeurs ou d'un graphique. Il est aussi en mesure d'observer et d'interpréter des représentations graphiques de situations concrètes.

Dans le cas des manipulations algébriques, l'élève utilise, au besoin, des dessins ou des arrangements rectangulaires, par exemple en ce qui concerne la multiplication de monômes. Il est amené à faire des liens intradisciplinaires et interdisciplinaires et à effectuer des transferts en manipulant des expressions algébriques dans des situations telles que la résolution d'une proportion, le calcul de périmètres ou d'aires ou encore l'utilisation de formules dans un tableur. Ces manipulations se font au moment de la substitution de valeurs numériques et de la résolution d'équations.

Lorsque l'élève substitue des valeurs numériques dans une expression algébrique pour calculer une valeur, ou dans une équation pour valider sa solution, il réinvestit les propriétés des opérations arithmétiques. De plus, lorsqu'il résout une équation, il choisit une méthode appropriée : essais et erreurs, dessins, méthodes arithmétiques (opérations inverses ou équivalentes), méthodes algébriques (principe de la balance, méthode du terme caché).

Les conjectures énumérées ci-dessous représentent des exemples que l'on peut proposer à l'élève pour qu'il exerce son raisonnement dans un contexte arithmétique et algébrique. Le but est de l'amener à justifier les étapes de son raisonnement lorsqu'il conclut que des conjectures sont vraies ou à produire un contre-exemple lorsqu'il juge qu'elles sont fausses.

- *La somme de deux nombres naturels consécutifs est impaire.*
- *La somme d'une suite de nombres impairs consécutifs commençant par 1 est un nombre carré.*
- *La somme de deux nombres impairs consécutifs est divisible par 4.*
- *Un nombre carré est la somme de deux nombres triangulaires consécutifs.*
- *Soit trois nombres consécutifs, la différence entre le carré du deuxième et le produit du premier et du troisième est 1.*
- *Le produit de deux nombres strictement positifs est supérieur ou égal à chacun de ces deux nombres.*
- *Si un nombre entier est pair, alors il se termine par le chiffre 2.*
- *Si un nombre entier se termine par le chiffre 2, alors c'est un nombre pair.*

Repères culturels

La mathématique ne connaît pas de frontières raciales ou géographiques;
pour la mathématique, le monde de la culture ne forme qu'un seul pays.
David Hilbert

L'apprentissage de la mathématique doit amener l'élève à reconnaître l'apport de l'arithmétique et de l'algèbre dans différents domaines tels que ceux de l'univers social, de la science et de la technologie ou encore des arts. Il devrait aussi lui fournir l'occasion d'observer les caractéristiques, les avantages et les inconvénients de différents systèmes de numération afin de bien situer celui qu'il utilise dans sa vie quotidienne et d'en saisir la portée. Il devrait enfin le sensibiliser à l'existence de plusieurs types de nombres, tels que les nombres polygonaux et les nombres premiers, ainsi qu'à certaines de leurs applications, par exemple la cryptographie. Par ailleurs, l'enseignant pourrait présenter quelques suites remarquables, dont celle de Fibonacci ainsi que le triangle de Pascal, et leurs différentes applications; proposer des situations-problèmes portant sur l'arithmétique et l'algèbre et tirées de documents anciens tels que le *Papyrus Rhind*; donner de l'information sur l'évolution, au cours des âges, de l'utilisation des notations, des symboles, des processus de calcul et des méthodes de résolution d'équations; ou encore susciter des discussions sur la puissance et les limites des outils de calcul (machine à calculer de Pascal, calculatrice).

Probabilité

La vie est une école de probabilité.
Walter Bagehot

Au primaire, l'élève a fait des expériences liées au concept de hasard. Il a prédit qualitativement des résultats en se familiarisant avec les concepts de résultat certain, de résultat possible, de résultat impossible, d'événement plus probable, d'événement également probable et d'événement moins probable. Il a dénombré les résultats d'une expérience aléatoire à l'aide de tableaux et de diagrammes en arbre et a comparé des résultats obtenus avec des résultats théoriques connus.

Au premier cycle du secondaire, il construit et s'approprie les concepts et les processus suivants :

Concepts

Expérience aléatoire

- Expérience aléatoire
  - Expériences aléatoires à une ou plusieurs étapes (avec ou sans remise, avec ou sans ordre)
  - Résultats d'une expérience aléatoire
  - Univers des résultats possibles
- Événement
  - Événement certain, probable, impossible, élémentaire
  - Événements complémentaires, compatibles, incompatibles, dépendants, indépendants
- Probabilité théorique et probabilité fréquentielle

Processus

Traitement de données tirées d'expériences aléatoires

- Dénombrement des possibilités par la mise à profit de différents modes de représentation : arbre, réseau, grille, etc.
- Calcul de la probabilité d'un événement

Note
Dans la construction de sa pensée probabiliste, l'élève est initié au langage ensembliste, que l'on considère comme un outil de compréhension et de communication.

Éléments de méthode

L'étude de la probabilité est une occasion de varier les activités et de dynamiser l'apprentissage. Les expériences, les situations concrètes, les jeux et l'utilisation de diagrammes, de graphiques et de schémas facilitent, par leur apport visuel, l'apprentissage et la compréhension de phénomènes aléatoires. La répétition d'une expérience permet d'assimiler certains concepts liés aux phénomènes dans lesquels intervient le hasard. Ce n'est souvent que grâce à de nombreuses simulations que l'élève peut traiter des phénomènes non équiprobables, prendre conscience de la portée de certaines affirmations ou déceler un éventuel trucage dans les règlements d'un jeu, dans un pari ou dans le résultat d'un sondage.

L'élève développe sa pensée probabiliste par l'expérimentation. La vérification de la réalisation de ses prédictions l'intéresse. Il se pose un certain nombre de questions durant les activités de simulation et découvre des relations entre des faits jugés pertinents. La diversité des activités qu'on lui propose lui permet de discuter, de réajuster ses idées et de dégager lui-même des modèles. C'est en analysant et en interprétant des probabilités obtenues dans le but de prendre des décisions ou de faire des prédictions qu'il développe son esprit critique.

L'élève illustre et dénombre les différentes possibilités d'une expérience aléatoire, notamment à l'aide d'arbres, de réseaux ou de grilles. Ces différentes représentations lui permettent de déduire la règle de multiplication appropriée dans les cas où les possibilités sont trop nombreuses. De plus, les diagrammes en arbre l'aident à illustrer les probabilités des expériences aléatoires et à calculer celles de différents événements.

Statistique

La statistique est le seul outil permettant d'effectuer une percée dans le formidable enchevêtrement de difficultés qui barre le passage à ceux qui sont en quête de la connaissance de l'Homme.
Sir Francis Galton

Au primaire, l'élève a réalisé des sondages : il a appris à formuler des questions, à faire une collecte de données et à les organiser à l'aide de tableaux. Il a aussi interprété et représenté des données à l'aide de diagrammes à bandes, à pictogrammes et à ligne brisée. Il a interprété des diagrammes circulaires et a calculé la moyenne arithmétique d'une distribution.

Au premier cycle du secondaire, il construit et s'approprie les concepts et les processus suivants :

Concepts

Relevé statistique

- Population, échantillon
  - Sondage, recensement
  - Échantillon représentatif
  - Méthodes d'échantillonnage : aléatoire simple, systématique
  - Sources de biais
- Données
  - Caractère qualitatif
  - Caractère quantitatif discret ou continu
- Tableau : caractères, effectifs, fréquences
- Lecture de représentations graphiques : diagramme à bandes, diagramme à ligne brisée, diagramme circulaire
- Moyenne arithmétique
- Étendue

Processus

Traitement de données tirées de relevés statistiques

- Réalisation d'un sondage ou d'un recensement
  - Détermination de la population ou de l'échantillon
  - Collecte de données
- Organisation et choix de certains outils permettant de rendre compte des données recueillies
  - Construction de tableaux
  - Construction de représentations graphiques : diagramme à bandes, diagramme à ligne brisée, diagramme circulaire
  - Mise en évidence de certains aspects de l'information pouvant être dégagés d'un tableau ou d'une représentation graphique (ex. le minimum, le maximum, l'étendue, la moyenne)

Éléments de méthode

La statistique contribue au développement du jugement critique de l'élève. Pour être en mesure de tirer des conclusions ou de prendre des décisions éclairées en s'appuyant sur les résultats d'une étude ou d'une recherche, l'élève doit connaître toutes les étapes de la réalisation d'un sondage. Pour ce faire, il peut s'exercer à appliquer chacune de ces étapes à partir d'une problématique qu'il a ciblée et qui est issue de contextes intradisciplinaires ou interdisciplinaires. Il conçoit un questionnaire et choisit un échantillon représentatif de la population étudiée. Il recueille des données, les organise à l'aide d'un tableau, les représente sous forme de diagrammes et en dégage des informations pour interpréter et analyser les résultats obtenus. Il choisit le ou les diagrammes qui permettent d'illustrer la situation d'une façon appropriée et compare, s'il y a lieu, des distributions.

Repères culturels

Les situations où il faut dégager le concept de hasard, interpréter des probabilités ou comprendre des statistiques sont nombreuses et variées. Les activités d'apprentissage en mathématique peuvent être l'occasion d'une sensibilisation à l'origine et à l'évolution des expériences aléatoires, du calcul des probabilités et du développement de la statistique. Elles offrent aussi à l'élève la possibilité de s'intéresser aux mathématiciens ayant contribué à leur essor et de l'amener à faire une analyse critique des jeux de hasard. Elles peuvent enfin ouvrir sur l'évolution au fil du temps du rapport de l'homme aux événements reliés à ce champ.

GÉOMÉTRIE

La géométrie est une habileté des yeux, des mains et de l'esprit.
Jean Pedersen

Au primaire, l'élève a repéré des nombres sur un axe et dans le plan cartésien. Il a construit et comparé différents solides (prisme, pyramide, boule, cylindre et cône), étudiant plus particulièrement les prismes et les pyramides. Il a reconnu le développement de polyèdres convexes et a expérimenté la relation d'Euler. Il a décrit et classifié des quadrilatères et des triangles. Il connaît les éléments relatifs au cercle (rayon, diamètre, circonférence, angle au centre). Il a observé et produit des frises et des dallages à l'aide de réflexions et de translations. Finalement, il a estimé et déterminé différentes mesures : longueur, angle, surface, volume, capacité, masse, temps et température.

Au premier cycle du secondaire, il construit et s'approprie les concepts et les processus suivants :

Concepts

Figures géométriques[12] et sens spatial

- Figures planes
  - • Triangles, quadrilatères et polygones réguliers convexes
    - Segments et droites remarquables : bissectrice, médiatrice, médiane, hauteur
    - Base, hauteur
  - • Cercle, disque et secteur
    - Rayon, diamètre, corde, arc
    - Angle au centre
  - • Mesure
    - Angle et arc en degrés
    - Longueur
    - Périmètre, circonférence
    - Aire, aire latérale, aire totale
    - Choix de l'unité de mesure pour les longueurs ou les aires
    - Relations entre les unités de longueur du SI[13]
    - Relations entre les unités d'aire du SI
- Angles
  - • Complémentaires, supplémentaires
  - • Créés par deux droites sécantes : opposés par le sommet, adjacents
  - • Créés par une droite sécante à deux autres droites : alternes-internes, alternes-externes, correspondants

Processus

- Constructions géométriques
- Transformations géométriques
  - • Translation, rotation, réflexion
  - • Homothétie de rapport positif
- Recherche de mesures manquantes
  - • Angles
    - Mesures manquantes dans différents contextes
  - • Longueurs
    - Périmètre d'une figure plane
    - Circonférence d'un cercle et longueur d'un arc
    - Périmètre d'une figure provenant d'une similitude
    - Segments provenant d'une isométrie ou d'une similitude
    - Mesure manquante d'un segment d'une figure plane
  - • Aires
    - Aire de polygones décomposables en triangles et en quadrilatères
    - Aire de disques et de secteurs
    - Aire de figures décomposables en disques, en triangles ou en quadrilatères
    - Aire latérale ou totale de prismes droits, de cylindres droits ou de pyramides droites
    - Aire latérale ou totale de solides décomposables en prismes droits, en cylindres droits ou en pyramides droites

12. Dans un espace géométrique dont la dimension est donnée (0, 1, 2 ou 3), une figure géométrique est un ensemble de points servant à représenter un objet géométrique tel qu'un point, une droite, une courbe, un polygone, un polyèdre.
13. Système international d'unités.

Concepts (*Suite*)

– Solides[14]
  - Prismes droits, pyramides droites et cylindres droits
  - Développements possibles d'un solide
  - Solides décomposables
– Figures isométriques et semblables

Processus (*Suite*)

Note

Les processus liés aux transformations et aux constructions géométriques servent à construire des concepts et à dégager des invariants et des propriétés afin de les réinvestir dans différents contextes et de développer le sens spatial. Elles peuvent être réalisées à l'aide d'instruments de géométrie ou de logiciels appropriés dans le plan euclidien. Les transformations géométriques dans le plan cartésien ne sont pas retenues au premier cycle.

Lors de la recherche de mesures manquantes, l'élève est occasionnellement invité à effectuer des transferts dans des problèmes plus complexes, c'est-à-dire ceux qui nécessitent la décomposition d'un problème en sous-problèmes, par exemple le calcul de l'aire de figures décomposables. De ce fait, il gère un problème qui comporte plusieurs étapes. Il met aussi à profit le développement d'un solide. De plus, il utilise des relations et des propriétés connues. Il met en œuvre des processus arithmétiques et algébriques ainsi qu'un raisonnement proportionnel.

14. Dans le présent programme, on approfondit le développement du sens spatial entrepris au primaire. À cet égard, on se réfère aux *processus* et aux *éléments de méthode*.

Éléments de méthode : concepts

Les énoncés que l'on trouve à la fin de cette section sont indiqués à titre d'exemples; on peut les proposer à l'élève pour qu'il exerce son raisonnement dans un contexte géométrique. Les propriétés étudiées, sans pour autant qu'il les ait démontrées, doivent constituer des conclusions que l'élève est amené à établir à partir d'activités d'exploration qui sollicitent, entre autres, son sens spatial ainsi que sa connaissance des propriétés des transformations géométriques. Ces énoncés l'aident à justifier sa démarche lorsqu'il résout une situation-problème ou qu'il déploie un raisonnement mathématique. Afin de l'initier au raisonnement déductif, on lui montre comment déduire des propriétés à l'aide d'un raisonnement rigoureux et à partir de définitions ou de propriétés déjà établies. (Les énoncés 17, 19, 24 et 25 à la page 261 peuvent être utilisés à cette fin.)

L'utilisation des transformations du plan doit être considérée comme un moyen dynamique de construire des concepts géométriques et d'en dégager des propriétés et des relations qui pourront éventuellement être réinvesties. Les opérations faites par l'élève pour réaliser une construction favorisent l'acquisition des concepts fondamentaux de parallélisme, de perpendicularité et d'angle. Les nombreuses observations qu'il peut faire à partir d'une construction lui permettent également d'explorer les propriétés des transformations géométriques. Par exemple, les translations, les réflexions et les rotations introduisent l'idée d'isométrie et l'homothétie de rapport positif, l'idée de similitude. Les constructions de type « papier-crayon » et l'utilisation de matériel concret ou de logiciels de géométrie dynamique sont également des moyens de construire des concepts géométriques.

Pour développer son sens spatial en trois dimensions, un apprentissage qui nécessite du temps, l'élève représente des solides à l'aide d'un dessin à main levée. Il identifie des solides soit par leurs développements ou par leurs représentations dans le plan. Il reconnaît des figures planes obtenues en sectionnant un solide à l'aide d'un plan.

Éléments de méthode : processus

Les formules nécessaires en mesure sont construites par l'élève à partir d'activités qui font appel à divers moyens tels que la construction de type « papier-crayon », l'utilisation de logiciels appropriés et la manipulation d'expressions algébriques.

Dans le développement de son sens de la mesure, l'élève construit les concepts de périmètre et d'aire. Pour ce faire, il est amené à comparer des périmètres et des aires dans différents contextes. De plus, il peut émettre des conjectures sur l'effet de la modification d'un paramètre dans une formule, par exemple : « Qu'arrive-t-il au périmètre d'un rectangle si ses dimensions sont doublées? Qu'arrive-t-il à l'aire d'un disque si on double le rayon? Qu'arrive-t-il à l'aire d'un rectangle si la longueur de sa base est doublée, triplée ou diminuée de moitié? »

Afin de déterminer une mesure manquante et de justifier les étapes de sa démarche, l'élève s'appuie sur des définitions et des propriétés plutôt que sur le mesurage. Il met à profit des concepts et des processus liés à l'arithmétique, à l'algèbre et à la proportionnalité.

La richesse de la géométrie réside dans le fait qu'elle est réinvestie dans l'appropriation des concepts, tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de la discipline. Par exemple, l'élève se sert des concepts géométriques pour représenter des nombres, des opérations et des expressions algébriques. Les concepts de similitude et de proportionnalité sont mobilisés dans différentes représentations graphiques. De plus, le contexte géométrique, qui sollicite le concept d'aire, permet de créer des situations favorables au calcul de probabilités.

Repères culturels

L'élève est incité à utiliser sa pensée géométrique et son sens spatial dans ses activités quotidiennes et différents contextes disciplinaires ou interdisciplinaires, tels que celui des arts ou de la science et de la technologie, ou encore dans différentes situations sociales, en réponse à certains besoins : se repérer dans l'espace, lire une carte géographique, évaluer une distance ou utiliser des jeux électroniques. Il a l'occasion de découvrir des mathématiciens qui ont marqué l'histoire de la géométrie et de la mesure, par exemple Euclide ou Thalès. Il étudie l'évolution du calcul de la valeur π, un nombre qui a de tout temps fasciné les gens. Il résout des problèmes de mesure sur lesquels plusieurs mathématiciens se sont penchés au cours des siècles, par exemple le calcul de la circonférence de la Terre (Ératosthène), du rayon de la Terre, de la distance entre la Terre et la Lune ou de la hauteur d'une pyramide. Certains instruments de mesure ont traversé les époques et d'autres ont été perfectionnés; l'élève découvre ces instruments ainsi que l'emploi de différentes unités de mesure.

ÉNONCÉS DE GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

1. Dans tout triangle isocèle, les angles opposés aux côtés isométriques sont isométriques.
2. L'axe de symétrie d'un triangle isocèle supporte une médiane, une médiatrice, une bissectrice et une hauteur de ce triangle.
3. Les côtés opposés d'un parallélogramme sont isométriques.
4. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
5. Les angles opposés d'un parallélogramme sont isométriques.
6. Les diagonales d'un rectangle sont isométriques.
7. Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.
8. Si deux droites sont parallèles à une troisième, alors elles sont aussi parallèles entre elles.
9. Si deux droites sont perpendiculaires à une troisième, alors elles sont parallèles.
10. Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une d'elle est perpendiculaire à l'autre.
11. Trois points non alignés déterminent un et un seul cercle.
12. Toutes les médiatrices des cordes d'un cercle se rencontrent au centre de ce cercle.
13. Tous les diamètres d'un cercle sont isométriques.
14. Dans un cercle, la mesure d'un rayon est égale à la demi-mesure du diamètre.
15. Dans un cercle, le rapport de la circonférence au diamètre est une constante que l'on note π.
16. Des angles adjacents dont les côtés extérieurs sont en ligne droite sont supplémentaires.
17. Les angles opposés par le sommet sont isométriques.
18. Dans un cercle, l'angle au centre a la même mesure en degrés que celle de l'arc compris entre ses côtés.
19. Si une droite coupe deux droites parallèles, alors les angles alternes-internes, alternes-externes et correspondants sont respectivement isométriques.
20. Dans le cas d'une droite coupant deux droites, si deux angles correspondants (ou alternes-internes ou encore alternes-externes) sont isométriques, alors ils sont formés par des droites parallèles coupées par une sécante.
21. Si une droite coupe deux droites parallèles, alors les paires d'angles internes situées du même côté de la sécante sont supplémentaires.
22. Dans un cercle, le rapport des mesures de deux angles au centre est égal au rapport des mesures des arcs interceptés entre leurs côtés.
23. Dans un disque, le rapport des aires de deux secteurs est égal au rapport des mesures des angles au centre.
24. La somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle est de 180º.
25. La mesure d'un angle extérieur d'un triangle est égale à la somme des mesures des angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents.
26. Les éléments homologues de figures planes ou de solides isométriques ont la même mesure.
27. Les angles homologues des figures planes ou des solides semblables sont isométriques et les mesures des côtés homologues sont proportionnelles.
28. Dans des figures planes semblables, le rapport entre les aires est égal au carré du rapport de similitude.

Exemples de stratégies associées à la résolution de situations-problèmes et pouvant être développées par l'élève au moment de l'exercice de ses compétences

… et chaque vérité que je trouvais étant une règle qui me servait après à en trouver d'autres…
René Descartes

Compréhension

- Distinguer les termes du langage courant et du langage mathématique
- Se représenter la situation mentalement ou par écrit
- Dégager la tâche à réaliser
- Reformuler la situation dans ses propres mots

Organisation

- Établir des liens
- Mobiliser les concepts et les processus
- Utiliser des listes, des tableaux, des schémas, du matériel concret, des dessins

Solution

- Procéder par essais et erreurs
- Faire des retours sur son travail (travailler à rebours)
- Se référer à un problème analogue déjà résolu
- Diviser un problème complexe en sous-problèmes
- Simplifier le problème

Validation

- Vérifier sa solution à l'aide d'exemples ou par un raisonnement
- Utiliser d'autres processus, s'il y a lieu
- Chercher des contre-exemples
- Comparer et confronter ses démarches et ses résultats avec ceux de son enseignant ou de ses pairs

Communication

- Structurer ses idées
- Confronter sa compréhension de mots communs au langage courant et au langage mathématique
- Mobiliser différents modes de représentation
- Expérimenter différentes façons de transmettre un message à caractère mathématique
- Expliquer son raisonnement

Bibliographie

Orientations générales

ABRANTES, Paulo, Lurdes SERRAZINA et Isolina OLIVEIRA. *A Matemática na Educação Básica*, Lisbonne, Departamento da Educação Básica, 1999, 129 p.

BARBEROUSSE, Anouk. « Un dédale conceptuel dans l'empire des probabilités, Dieu joue-t-il aux dés? », *Sciences et avenir,* Paris, hors-série, octobre-novembre 2001, nº 128, p. 16-22.

BURKE, Maurice J. et Frances R. CURCIO (dir.). *Learning Mathematics for a New Century: 2000 Yearbook*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, 2000, 240 p.

CUOCO, Albert A. et Frances R. CURCIO (dir.). *The Roles of Representation in School Mathematics: 2001 Yearbook*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, 2001, 282 p.

DEPARTMENT FOR EDUCATION AND EMPLOYMENT OF ENGLAND. *The National Curriculum for England: Mathematics,* [En ligne], 1999, [http://www.nc.uk.net].

DEPARTMENT OF EDUCATION, GOVERNMENT OF WEST AUSTRALIA. *Mathematics: Student Outcome Statements*, [En ligne], 1998, [http://www.eddept.wa.edu.au/outcomes/maths/mathmenu.htm] (septembre 2000).

HOUSE, Peggy A. et Arthur F. COXFORD (dir.). *Connecting Mathematics across the Curriculum: 1995 Yearbook*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, 1995, 245 p.

MASON, John. *L'esprit mathématique*, Mont-Royal, Modulo, 1994, 178 p. (Collection La spirale).

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, 2000, 402 p.

PAULOS, John Allen. *Innumeracy, Mathematical Illiteracy and its Consequences*, New York, Vintage Books, 1990, 180 p.

PORTUGAL, DEPARTAMENTO DA EDUCAÇÃO BÁSICA DO PORTUGAL. *Currículo Nacional: Competéncias Essenciais – Matemática*, 2001, p. 57-71.

QUÉBEC, MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. *Guide pédagogique, primaire, mathématique, fascicule K, Résolution de problèmes*, document 16-2300-11, Québec, ministère de l'Éducation, 1988, 94 p.

STIFF, Lee V. et Frances R. CURCIO (dir.). *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12: 1999 Yearbook*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, 1999, 288 p.

WALTER, Anne. « Quelle géométrie pour l'enseignement en collège? », *Petit x*, 2000-2001, nº 54, p. 31-49.

Références didactiques

ARSAC, Gilbert et autres. *Initiation au raisonnement déductif au collège*, Lyon, Presses Universitaires de Lyon, 1992, 188 p.

ARSAC, Gilbert. « Un cadre d'étude du raisonnement mathématique », *Séminaire didactique et technologies cognitives en mathématiques*, Grenoble, IMAG, 1996.

BARBIN, Évelyne. « Histoire et enseignement des mathématiques : Pourquoi? Comment? », *Bulletin AMQ*, mars 1997, vol. XXXVII, nº 1, p. 20-25.

BECKER, Jerry P. et Shigeru SHIMADA (dir.). *The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics*, Reston, NCTM, 1997, 175 p.

DESCAVES, Alain. *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes*, Paris, Hachette Éducation, 1992, 191 p. (Collection Pédagogies pour demain, Didactiques 1er degré).

DUPERRET, Jean-Claude. « Le geste géométrique, ou l'acte de démontrer », *Repères, Revue des IREM*, avril 2001, nº 43, p. 83-116.

DUVAL, Raymond. « Pour une approche cognitive de l'argumentation », *Annales de didactique et de sciences cognitives 3*, Strasbourg, IREM de Strasbourg, 1990, p. 195-221.

EDWARDS, Edgar L. Jr. *Algebra for Everyone*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, 1990, 89 p.

FRIEL, Susan, Sid RACHLIN et Dot DOYLE. *Navigating Through Algebra in Grades 6-8*, Reston, NCTM, 2001, 90 p. (Collection Navigations Series).

GROS, Daniel. « Une enquête statistique au service de la proportionnalité », *Repères, Revue des IREM*, juillet 2001, nº 44, p. 69-81.

KILPATRICK, Jeremy, Jane SWAFFORD et Bradford FINDELL. *Adding It Up, Helping Children Learn Mathematics*, Washington, National Academy Press, 2001, 250 p.

LITWILLER, Bonnie et George BRIGHT (dir.). *Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions: 2002 Yearbook and Classroom Activities*, Reston, NCTM, 2002, 261 p. et 58 p.

OWENS, Douglas T. (dir.). *Research Ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics*, New York, Macmillan Library Reference, 1993, 350 p.

PUGALEE, David K. et autres. *Navigating Through Geometry in Grades 6-8*, Reston, NCTM, 2001, 114 p. (Collection Navigations Series).

RENÉ DE COTRET, Sophie. *Étude de l'influence des variables : indice de proportionnalité du thème et nombre de couples de données sur la reconnaissance. Le traitement et la compréhension de problèmes de proportionnalité chez les élèves de 13-14 ans*, thèse de doctorat, Grenoble, Université Joseph Fourier, 1991, 276 p.

RICHARD, Philippe R. *Modélisation du comportement en situation de validation : Diagnostic sur les stratégies de preuve et sur leur raisonnement employés en géométrie par des élèves de niveau secondaire*, thèse de doctorat, Barcelone, Université autonome de Barcelone, 2000, 335 p.

ROUCHE, Nicolas. *Pourquoi ont-ils inventé les fractions?*, Paris, Ellipses, 1998, 126 p. (Collection L'Esprit des sciences).

VAN DE WALLE, John A. *Elementary School Mathematics : Teaching Developmentally,* 2e édition, New York, Longman, 1994, 467 p.

Ouvrages de référence

BARUK, Stella. *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*, Paris, Seuil, 1992, 1324 p.

BOUVIER, Alain et Michel GEORGE, sous la direction de François LE LYONNAIS. *Dictionnaire des mathématiques*, Paris, PUF, 1983, 834 p.

BURTON, David M. *The History of Mathematics: An introduction*, Dubuque, WCB, 1988, 678 p.

MANKIEWICZ, Richard. *L'histoire des mathématiques*, Paris, Seuil, 2001, 192 p.

QUÉBEC, MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. *Graphisme, notations et symboles utilisés en mathématique au secondaire*, document d'information 16-3306, Québec, ministère de l'Éducation, 1996, 31 p.